

Über die metrologische Qualität der Fahrzeugortung

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Dipl.-Ing. Marco Wegener
aus: Wuppertal

eingereicht am: 09.08.2013
mündliche Prüfung am: 22.11.2013

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Eckehard Schnieder
Prof. Hon.-Prof. Dr.-Ing. Klaus-Dieter Sommer

2013

„Es zeichnet einen gebildeten Geist aus, sich mit jenem Grad an Genauigkeit zufrieden zugeben, den die Natur der Dinge zulässt, und nicht dort Exaktheit zu suchen, wo nur Annäherung möglich ist.“

Aristoteles

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Braunschweig. Die Arbeit steht in langer Tradition des Forschungsschwerpunkts *Satellitenbasierte Fahrzeugortung*. Es lag somit nahe, die Fahrzeugposition als Beispiel für die Beurteilung der Messqualität heranzuziehen. Darüber hinaus stellt die hochgenaue und verlässliche Ortung eine wichtige Grundfunktionalität bei der zunehmenden Fahrzeugautomatisierung dar, die mich seit jeher fasziniert. Ich hoffe mit dieser Arbeit einen bescheidenen Beitrag geleistet zu haben und möchte mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Eckehard Schnieder – Leiter des Instituts für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik – danke ich für die Ermöglichung der Promotion und die geistreichen Diskussionen während dieser.

Herrn Prof. Hon.-Prof. Dr.-Ing. Klaus-Dieter Sommer von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt danke ich für die Übernahme des Koreferats und die umfangreiche Einführung in die Thematik der Messunsicherheitsbeurteilung.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Rainer Tutsch – Leiter des Instituts für Produktionsmesstechnik – für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission und die vielen Ratschläge zur Prüfung im angenehmen Vorgespräch.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr. Bernd R. L. Siebert, der tapfer meine vielen „*akademischen Fragen*“ zur Messunsicherheit beantwortet hat.

Bei meinem ehemaligen Bürokollegen und Freund Herrn Dr.-Ing. Matthias Hübner bedanke ich mich für die fruchtbare Zusammenarbeit bei den gemeinsamen Veröffentlichungen, die das Fundament für diese Dissertation gelegt haben. Den gedanklichen

Austausch bei zahlreichen Espressi über Wissenschaft und Weltgeschehen schätze ich bis heute.

Herr Dipl.-Ing. Felix Reinbold hat tatkräftig und stets hilfsbereit an der Implementierung des mobilen Referenzsystems mitgewirkt. Auch ihm sei an dieser Stelle gedankt.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern, die mir all die Jahre Halt gegeben haben und ohne deren Unterstützung ich es nie soweit geschafft hätte. Ich danke für den Beistand meiner lieben Frau, ohne deren strenge Begutachtung keine meiner Veröffentlichungen das Arbeitszimmer verlassen hat.

Braunschweig, im November 2013

Marco Wegener

Kurzfassung

Zukünftige Anwendungen für die satellitenbasierte Ortung im Verkehr werden immer höhere Anforderungen an die Messqualität der Fahrzeugposition stellen. Wichtigstes Anwendungsbeispiel hierfür ist das automatisierte Fahren im Straßenverkehr. Hierzu muss die hinreichende metrologische Qualität der Positionswerte nach einem systematischen und allgemein akzeptierten Verfahren nachgewiesen werden. Erst eine solche Prüfung schafft die Rechtssicherheit für den Einsatz von Ortungssystemen bei sicherheitsrelevanten und ökonomisch bedeutsamen Anwendungen.

In dieser Arbeit wird eine formale Axiomatisierung des Begriffs *Messqualität* durchgeführt. Darauf aufbauend werden Qualitätsmaße zur Quantifizierung der Messqualität definiert. Im Zuge dessen wird das international akzeptierte GUM-Verfahren zur Quantifizierung der Eigenschaft *Messunsicherheit* auf Zustandsraummodelle erweitert, um so auch zeitvariante Messgrößen, gemessen mit dynamischen Messsystemen, berücksichtigen zu können.

Für die Validierung des Messqualitätsmodells und seiner Qualitätsmaße werden allgemeingültige Anforderungen an Referenzsysteme für die Fahrzeugortung spezifiziert. Anschließend wird ein ortsgebundenes, satellitenunabhängiges Referenzsystem vorgestellt, das als Maßstab für das ebenfalls in dieser Arbeit entwickelte mobile Referenzsystem dient. Die Erprobung des exemplarisch implementierten mobilen Referenzsystems zeigt, dass die Generierung einer Referenzposition in hinreichender Qualität möglich ist.

Es wird deutlich, dass sich das universelle Verständnis des Begriffs Messqualität in jeder Beurteilung von Werten zeitvarianter Messgrößen widerspiegelt. Sowohl das ortsfeste Referenzsystem, die mobile Referenz als auch satellitenbasierte Ortungssysteme lassen sich hinsichtlich ihrer Messqualität stets nach demselben Schema beurteilen. Die vorgestellte Axiomatisierung der Messqualität ermöglicht somit einen standardisierten Vergleich von Fahrzeugortungssystemen.

Abstract

Future applications for satellite-based localization in transport lead to steadily increasing demands on the measurement quality of the vehicle position. The most important example is automated driving in road transport. For this purpose, the sufficiently high metrological quality of the position data needs to be proven by means of a commonly accepted test procedure. Only such an approval provides legal certainty regarding the use of localization systems for safety-relevant, economically and legally significant applications.

In this thesis, a formal axiomatization of the concept *measurement quality* is proposed. Based on this, quality measures for the quantification of the measurement quality are defined. Here, the internationally well-accepted GUM method for quantifying the property *measurement uncertainty* is extended on state-space models in order to cover time-varying measurands, measured by dynamical measuring systems.

For the validation of the measurement quality model and its quality measures, requirements on reference systems for vehicle localization in general are specified. A track-bounded and satellite-independent reference system is presented that serves as the measurement standard for vehicle localization in this work. The testing of an exemplary implementation of a mobile reference system demonstrated that the generation of a reference position for satellite-based localization with sufficiently high quality is feasible.

It becomes clear that the universal understanding of the concept measurement quality reflects in any assessment of values of time-varying measurands. The assessment of the track-bounded reference system, the mobile reference and satellite-based localization systems in terms of their measurement quality always follows the same pattern. The proposed axiomatization of measurement quality thus allows a standardized comparison of vehicle localization systems.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	vii
Abstract	ix
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	3
1.2 Stand der Wissenschaft	6
1.2.1 Definition der Ortung und ihrer Größen	6
1.2.2 Metrologische Ansätze zur Beurteilung von Messsystemen	8
1.2.3 Messtechnische Ansätze zur Beurteilung von Fahrzeugortungs- systemen	11
1.3 Zielsetzung	15
1.4 Struktur der Arbeit	17
2 Formalisierung metrologischer Fachbegriffe	19
2.1 Definition von Fachbegriffen für die Prüfung von Fahrzeugortungssystemen	20
2.2 Einführung in die Grundbegriffe der Metrologie	22
2.2.1 Begriffe des Messprozesses	22
2.2.2 Begriffe des Messresultats	25
2.3 Axiomatisierung der Messqualität	26
2.3.1 Konzept der Messunsicherheit	27
2.3.2 Konzept der Messgenauigkeit	30
2.3.3 Gegenüberstellung der Konzepte <i>Messunsicherheit</i> und <i>Messge- nauigkeit</i>	33
2.3.4 Weitere Eigenschaften der Messqualität	34
2.4 Quantifizierung der Messqualität	36

3	Theorie der zeitinvarianten Messunsicherheit	43
3.1	Historie der Messunsicherheitsbetrachtung	44
3.1.1	Entstehung und Etablierung des GUM	44
3.1.2	Unterschiede des GUM zur klassischen Fehlerrechnung	45
3.2	Standard-GUM-Verfahren zur Beurteilung der Messunsicherheit	50
3.2.1	Schritt I: Beschreibung der Messung	51
3.2.2	Schritt II: Modellierung der Messung	53
3.2.3	Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen	58
3.2.4	Schritt IV: Berechnung des besten Schätzwerts und der kombinierten Standardmessunsicherheit	62
3.2.5	Schritt V: Ermittlung der erweiterten Unsicherheit	67
3.2.6	Schritt VI: Angabe des vollständigen Messergebnisses	71
3.2.7	Zusammenfassung des Verfahrens	72
3.3	Messunsicherheitsbeurteilung mittels Monte-Carlo-Simulation	76
3.3.1	Schritt I: Beschreibung der Messung	77
3.3.2	Schritt II: Modellierung der Messung	78
3.3.3	Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen	78
3.3.4	Schritt IV: Berechnung des besten Schätzwerts und der kombinierten Standardmessunsicherheit	79
3.3.5	Schritt V: Berechnung des Überdeckungsintervalls	82
3.3.6	Schritt VI: Angabe des vollständigen Messergebnisses	84
3.4	Verifizierung der Messunsicherheit mittels Monte-Carlo-Simulation	85
3.5	Gegenüberstellung der vorgestellten Verfahren zur Beurteilung der Messunsicherheit	86
3.6	Methode zur Bereichskalibrierung im Kontext des GUM	89
4	Erweiterung des GUM-Verfahrens auf zeitvariante Größen und dynamische Messsysteme	93
4.1	Messunsicherheitsbeurteilung bei zeitvarianten Größen	94
4.2	Messunsicherheitsbeurteilung bei nichtlinearen dynamischen Messsystemen	95
4.2.1	Schritt II: Modellierung der Messung	97
4.2.2	Schritt IV: Berechnung der besten Zustands- und Ausgangsschätzwerte und ihrer kombinierten Unsicherheit	97
4.3	Messunsicherheitsbeurteilung bei linearen dynamischen Messsystemen	99
4.3.1	Schritt II: Modellierung der Messung	99
4.3.2	Schritt IV: Berechnung der besten Zustands- und Ausgangsschätzwerte und ihrer kombinierten Unsicherheit	99
4.3.3	Analyse des Systemverhaltens	100
4.3.4	Zusammenfassung	105
4.3.5	Beispiele zur Beurteilung der Messunsicherheit bei linearen dynamischen Messsystemen	107

5	Entwicklung und Beurteilung eines Ortungsnormals für den Straßenverkehr	113
5.1	Messaufbau und Datenfusion des Referenzsystems	114
5.1.1	Messaufbau des Referenzsystems	114
5.1.2	Datenfusion des Referenzsystems	117
5.2	Messunsicherheitsbeurteilung des Referenzsystems	119
5.2.1	Schritt I: Beschreibung der Messung	119
5.2.2	Schritt II: Modellierung der Messung	120
5.2.3	Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen	123
5.2.4	Schritt IV: Berechnung der kombinierten Standardmessunsicherheit	126
5.2.5	Schritt V: Ermittlung der erweiterten Messunsicherheit	128
5.2.6	Schritt VI: Angabe des vollständigen Ergebnisses	129
5.3	Softwaregestützte Verifizierung der beurteilten Messunsicherheit	130
5.4	Verifizierung der Qualitätseigenschaften des Referenzsystems	132
6	Entwurf und Realisierung eines mobilen Referenzsystems	139
6.1	Kategorisierung von technischen Anforderungen an ein mobiles Referenzsystem	140
6.1.1	Strukturelle Anforderungen	141
6.1.2	Parametrische Anforderungen	143
6.2	Gegenüberstellung und Bewertung von Ortungstechnologien	146
6.3	Messaufbau des mobilen Referenzsystems	150
6.3.1	Komponenten des Referenzsystems	150
6.3.2	Datenfusion des Referenzsystems	152
6.4	Kalibrierung des mobilen Referenzsystems	156
7	Quantifizierung der Messqualität mit Hilfe des mobilen Referenzsystems	159
7.1	Definition des Prüfzenarios	161
7.1.1	Wahl des Prüfgeländes	161
7.1.2	Wahl der Prüftrajektorien	164
7.2	Quantifizierung der GPS-Messqualität	164
8	Zusammenfassung und Ausblick	171
8.1	Zusammenfassung	171
8.2	Ausblick	174
	Literaturverzeichnis	177
	Abbildungsverzeichnis	193
	Tabellenverzeichnis	195
A	Herleitung des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes	197

KAPITEL 1

Einleitung

Der Positionsbestimmung von bewegten Objekten kommt eine immer größere Bedeutung zu. Hierbei spielen satellitenbasierte oder satellitengestützte Ortungssysteme eine große Rolle, da diese global und kostenfrei verfügbar sind und sich einfach in die unterschiedlichsten technischen Geräte integrieren lassen. Seit der vollständigen Inbetriebnahme des Global Positioning System (GPS) in den neunziger Jahren und der Entwicklung weiterer Systeme wie GLONASS, Galileo und Beidou hat sich ein breites Anwendungsspektrum für die satellitenbasierte Ortung entwickelt. Bislang stellte die Navigation das Hauptanwendungsgebiet für diese Ortungssysteme dar. Derzeit erwachsen darüber hinaus insbesondere in den verschiedenen Verkehrsdomänen weitere Anwendungsmöglichkeiten, die hohe Ansprüche an die Qualität der Ortungsdienste stellen werden, wie z. B. eine garantierte Positionsgenauigkeit.

Im Straßenverkehr wird die vollständige Automatisierung der Fahrzeuge seit langem thematisiert und als erstrebenswert angesehen [7, 79, 42, 56]. Dies liegt vor allem darin begründet, dass bei 84% aller Straßenverkehrsunfälle die Unfallursache auf ein Fehlverhalten des Fahrzeugführers zurückzuführen ist [123, S. 25]. Die Weiterentwicklung der Fahrzeugautomatisierung bietet somit ein enormes Potential zur Steigerung der Verkehrssicherheit. Ein erster Ansatz hierfür sind fortgeschrittene Fahrerassistenzsysteme (FAS, Advanced Driver Assistance Systems (ADAS)), durch deren Einsatz eine Steigerung der Effizienz, des Fahrkomforts und der Verkehrssicherheit erreicht werden soll. Beispiele für zukünftige Fahrerassistenzsysteme sind Kreuzungs- und Überholassistenten [151, S. 672] oder der Nothalteassistent [72], die langfristig zu vollautomatisierten Fahrzeugen führen werden [71]. Die hierfür notwendige Weiterentwicklung der Fahr-

zeugumfeldwahrnehmung allein reicht für die Erreichung dieses Ziels jedoch nicht aus, da beispielsweise ein aus der Seitenstraße kommendes Fahrzeug nicht rechtzeitig von den Fahrzeugumfeldsensoren erfasst wird. In [68] und [71] wird daher die Ergänzung der Umfeldwahrnehmung durch satellitenbasierte Absolutortung des Egofahrzeugs auf einer digitalen Karte als Basis für zukünftige Assistenzsysteme angesehen. Neben der Fahrzeugkommunikation (C2C – *Car to Car*, C2I – *Car to Infrastructure*, vgl. Projekt sim^{TD} [126]) stellt die hinreichend genaue und verlässliche Positionsmessung der sich bewegendenden Verkehrsteilnehmer eine der größten technischen Herausforderungen bei der Realisierung des automatisierten Verkehrs dar. Über die Fahrzeugautomatisierung hinaus erfordern zudem fahrstreifenselektive Maut- und Verkehrsleitsysteme eine hinreichend genaue und rechtsgültige Positionsbestimmung [101]. Gleichermaßen wird in der Landwirtschaft zunehmend auf die hochgenaue Ortung der eingesetzten Landmaschinen vertraut (*Precision Farming*) [106].

Die derzeitige Hauptanwendung der Ortung im Schienenverkehr ist die Zugleittechnik. Die momentan eingesetzten Systeme zur Positionsbestimmung von Schienenfahrzeugen [93] haben sich im Hinblick auf die Optimierung des Verkehrsflusses als nachteilig erwiesen. Beispielsweise erlauben die im Gleisbett verlegten Balisen nur eine ortsdiskrete Ermittlung der Zugposition, sodass darüber hinaus weitere Messinstrumente erforderlich sind, um eine quasi-kontinuierliche Positionsbestimmung zu ermöglichen. Zudem entstehen hohe Installations- und Wartungskosten durch die aufwändige, streckenseitige Infrastruktur. Der Einsatz satellitenbasierter Ortung bietet das Potenzial die Infrastruktur zu reduzieren, da hierbei die streckenseitige Ortungstechnik vollständig in die Schienenfahrzeuge verlagert wird. Derzeit ist der Einsatz satellitenbasierter Ortungssysteme im Eisenbahnbereich auf nicht sicherheitsrelevante Anwendungen wie Fuhrparkmanagement oder Fahrgastinformationssysteme beschränkt [5, S. 42]. Ihre Nutzung darüber hinaus würde jedoch variable Sicherheitsabstände zwischen den Zügen und somit eine höhere Streckenauslastung ermöglichen. Voraussetzung hierfür ist, dass eine gleisselektive Ortung der Schienenfahrzeuge durch die satellitenbasierte Ortung sichergestellt wird.

Die Luftfahrt stellt den ursprünglichen Anwendungsbereich für satellitenbasierte Ortungssysteme dar. Der sogenannte *EGNOS Safety of Life Service* für Ortungen bei sicherheitsrelevanten Anwendungen wurde speziell im Hinblick auf die Bedürfnisse des Luftfahrtsektors entwickelt [35, S. 8]. Anwendungsbeispiele sind hier der automatisierte Landeanflug und die Unterstützung bei der Navigation auf dem Rollfeld. Insbesondere kleinere Flughäfen können durch die Nutzung von satellitenbasierten Ortungssystemen anstelle der aufwändigen Bodeninfrastruktur erhebliche Kosten einsparen [35].

Maritime Anwendungsgebiete für die Ortung sind neben der Navigation auf hoher See vor allem das Einlaufen in den Hafenbereich und Anlegemanöver. Für ein zukünftiges

automatisches Anlegen von Schiffen ist eine Präzision der Ortung von mindestens 0,1 m erforderlich [32], welche bislang noch nicht erreicht wurde.

Die genannten Anwendungsfälle zeigen, dass allein im Verkehr bereits ein hohes Marktpotential für hochgenaue und verlässliche Ortungssysteme besteht. Insbesondere das europäische satellitenbasierte Ortungssystem Galileo wird hierbei zukünftig eine große Rolle spielen, da es global verfügbare Ortungsdienste mit garantierten Qualitätseigenschaften bieten wird. Die EU-Kommission ordnet hierbei dem Straßenverkehr die höchste Priorität bei der Weiterentwicklung von satellitenbasierten Anwendungen zu, da in diesem das größte Potential hinsichtlich der Erreichung der strategischen, ökonomischen und ökologischen Ziele der EU gesehen wird [35, S. 7]. Der wirtschaftliche Nutzen der europäischen Systeme Galileo und EGNOS innerhalb der nächsten zwanzig Jahre wird auf bis zu 63 Milliarden Euro geschätzt [35, S. 3].

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die Problemstellung in Bezug auf die Nutzung satellitenbasierter Ortungssysteme für sicherheitsrelevante Anwendungen im Verkehr aufgezeigt (Abschnitt 1.1). Hierbei wird aus der gegebenen Gesetzeslage und dem natürlichen Wunsch nach sicheren technischen Systemen die Notwendigkeit der messtechnischen Überprüfung von Fahrzeugortungssystemen motiviert. Abschnitt 1.2 bietet hierzu einen Überblick über den Stand der Wissenschaft zur Bewertung von Messsystemen im Allgemeinen sowie zur Beurteilung von Fahrzeugortungssystemen im Speziellen. Abschnitt 1.3 zeigt den komplexen Ablauf einer Eignungsprüfung eines Messsystems auf und stellt die in dieser Arbeit betrachteten und näher auszuarbeitenden Teilprozesse heraus. Die Struktur der Arbeit wird in Abschnitt 1.4 erläutert.

1.1 Problemstellung

Bei dem Einsatz von technischen Systemen im Rahmen sicherheitsrelevanter Anwendungen besteht stets die berechtigte Forderung, dass die korrekte Funktionsweise des Systems sichergestellt und das Restrisiko bzgl. einer Fehlfunktion auf ein tolerierbares Maß reduziert wird. Dies gilt insbesondere für Fahrzeugortungssysteme, deren Messergebnisse einen essentiellen Einfluss auf die Entscheidungen von Assistenzfunktionen haben. Das Restrisiko ist hierbei durch die Minimierung der Systemausfälle im Sinne der funktionalen Sicherheit so weit wie nötig zu reduzieren und durch eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Abschätzung der Korrektheit der Funktionsergebnisse bei intaktem System zu beurteilen [39, S. 21].

Zur systematischen Einordnung unterschiedlicher Formen der Fahrzeugautomatisierung wurde in [39] folgende Kategorisierung vorgeschlagen. Bei der *assistierenden Automa-*

tisierung führt das Assistenzsystem das Fahrzeug entweder bzgl. der Längs- oder der Querdynamik, wobei der Fahrzeugführer die Fahrzeugführung komplementär ergänzt und bereit sein muss, jederzeit die volle Fahrzeugführung zu übernehmen. Diese Form der Automatisierung befindet sich bereits im Serieneinsatz, wie z. B. beim Abstandsregelautomaten. Eine Übernahme von sowohl Längs- als auch Querdynamik durch das Assistenzsystem heißt *Teilautomatisierung*; die Systemüberwachung ist nach wie vor Aufgabe des Fahrzeugführers. Zwar hat das teilautomatisierte Fahren bislang nicht den Weg in die Serie gefunden, Ansätze wie in [71] und der *Temporary Auto Pilot* aus dem Forschungsprojekt HAVEit [47] weisen jedoch großes Potential hierfür auf. Die Steigerung der Teilautomatisierung ist die *Hochautomatisierung*, bei der der Fahrzeugführer das Assistenzsystem nicht ständig überwacht und sich erst nach explizierter Aufforderung durch das System der Fahrsituation und der Fahrzeugführung zuwendet. Den höchsten Grad der Fahrzeugautomatisierung stellt die *Vollautomatisierung* dar. Hierbei wird das Fahrzeug in allen definierten Verkehrssituationen automatisch geführt. Beim Auftreten einer Verkehrssituation, die nicht von der Assistenzfunktion abgedeckt wird, wird das Fahrzeug auch dann in einen Zustand mit minimalem Unfallrisiko überführt, wenn der Fahrzeugführer die Regelung der Fahrzeugdynamik nicht übernimmt.

Heutige Assistenzsysteme verstoßen nicht gegen geltendes Recht, da davon ausgegangen werden kann, dass das System stets im Interesse des Fahrers handelt (Abstandsregelautomat) oder das System erst in die Fahrdynamik eingreift, wenn der Fahrer ohnehin nicht mehr rechtzeitig reagieren kann (Notbremsassistent, ESP-Eingriff zur Vermeidung von Schleudern im Grenzbereich). Die Hoch- oder Vollautomatisierung führt – neben den technischen Herausforderungen – vor allem zu juristischen Problemen hinsichtlich des Verhaltens- und Haftungsrechts, wobei insbesondere das Haftungsrecht weitere technische Anforderungen generiert, wie folgende Überlegungen zeigen.

Bei assistierter oder teilautomatisierter Fahrzeugführung liegt die Sicherheitsverantwortung derzeit nach wie vor beim Fahrzeugführer. Diese Tatsache befindet sich im Einklang mit dem Verhaltensrecht, wie dem im Jahr 1968 verabschiedeten *Wiener-Weltabkommen*, in dem es heißt „*Führer ist jede Person, die ein Kraftfahrzeug ... lenkt. [...] Jeder Führer muss dauernd sein Fahrzeug beherrschen...*“ [132, Art. 1, Art. 8]. Dies wird ebenso vom § 1 Absatz 1 der StVO gestützt, welcher Vorsicht und Rücksicht gebietet [13]. Die vollständige Zuweisung der Verantwortung für das Fahrzeugverhalten an den Fahrzeugführer erscheint aus heutiger Sicht im Hinblick auf die Möglichkeiten der Fahrzeugautomatisierung jedoch nicht mehr erstrebenswert. Ein Grund hierfür ist beispielsweise das globale Optimum bzgl. der Effizienz des Straßenverkehrs, das nur mit hoch- oder vollautomatischen Fahrsystemen erreicht werden kann, die nicht vom Fahrer überstimmt werden [56, S. 8]. Es ist gerade Zweck der hochgradig automatisierten Fahrzeuge, dass der Fahrer nicht mehr als Rückfallebene dient [151, S. 668].

Das Straßenverkehrsgesetz [11], welches die Fragen der Halterhaftung regelt, kann auch auf die hoch- und vollautomatisierten Fahrzeuge angewendet werden [39, S. 28]. Die fahrerlose Automatisierung befindet sich jedoch nicht im Einklang mit geltendem Verhaltensrecht wie der StVO [39, S. 25], die davon ausgeht, dass der Fahrzeugführer jederzeit die Kontrolle über das Fahrzeug hat. Ein Unfall mit hoch- oder vollautomatisierten Fahrzeugen setzt „denknotwendig eine kausal fehlerhafte Systemsteuerung voraus“ [39, S. 32]. Mit fortschreitendem Automatisierungsgrad ist es daher zukünftig unvermeidbar, dass die Verantwortung für die Sicherheit der Verkehrsteilnehmer an die Hersteller übergeht.

Da die Fahrzeugortung eine wesentliche Basisfunktionalität für viele Assistenzsysteme darstellt, ist deren Qualität im Rahmen der zivilrechtlichen Schadensersatzpflicht (vgl. [10, § 823]) und der gesetzlichen Produkthaftung bedeutsam. Grundsätzlich ist jeder verpflichtet den vom ihm verursachten Schaden zu ersetzen (EU-Richtlinie 85/374/EWG [99]). Entsprechend dem Produkthaftungsgesetz muss der Hersteller im Schadensfall zur Vermeidung des Schadensersatzes nachweisen, dass alle Rechtsvorschriften beachtet wurden und die Fehlfunktion des Systems „nach dem Stand von Wissenschaft und Technik in dem Zeitpunkt, in dem der Hersteller das Produkt in den Verkehr brachte, nicht erkannt werden konnte“ [12, § 1]. Der Nachweis muss somit insbesondere unter Berücksichtigung aller relevanten Normen und Standards geführt werden [108]. Hierbei sind insbesondere die Normenreihe IEC 61508 [59] für sicherheitsrelevante Bauteile allgemeiner Art sowie ihre verkehrsdömanenspezifischen Ableger im Eisenbahnbereich EN 50126, EN 50128 und EN 50129 ([25, 26, 30], vgl. [108]) sowie die für den Automobilbereich neu erarbeitete ISO 26262 [60] zu beachten, welche einen Sicherheitsnachweis für elektronische Fahrzeugkomponenten nach dem aktuellen Stand der Technik fordert [122, S. 74]. Neben den genannten Sicherheitsaspekten ist die Überprüfung von Ortungssystemen im normativ-rechtlichen Rahmen auch aus finanzieller Sicht bedeutsam, da beispielsweise bei einer fahrstreifenselektiven Maut die korrekte Abrechnung gegenüber dem Verkehrsteilnehmer gewährleistet werden muss.

Für die notwendige Zulassung von Ortungssystemen für hoch- und vollautomatisierte Fahrzeuge ist zum einen der normkonforme Sicherheitsnachweis (im Sinne der *safety* und *security*) notwendig. Zum anderen erfordert die Zulassung für höhere Automatisierungsgrade die messtechnische Prüfung und Dokumentation der Messqualität nach den geltenden Normen und Standards mit dem Ziel, das sich ergebende Restrisiko mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden vergleichbar angeben zu können [39, S. 34,35]. Vorhandene Begriffsdefinitionen werden erfahrungsgemäß häufig falsch interpretiert. Dies ist problematisch, denn „*Unscharfe Begriffe führen zu einer zusätzlichen Verminderung der Kenntnisse.*“ [76]. Der Begriff *Messqualität* ist in Bezug auf Fahrzeugortungssysteme nicht definiert, sodass derzeit keine allgemein akzeptierte Aussage über die Leistungsfähigkeit eines Ortungssystems getroffen werden kann. Für die

quantitative Beurteilung der Messqualität bedarf es nach DIN EN ISO/IEC 17025 [28] akkreditierter Prüflabore, die physikalisch unabhängige Referenzortungssysteme und geeignete Prüfprozeduren vorhalten. Derartige Prüflabore existieren derzeit nicht.

1.2 Stand der Wissenschaft

In Anbetracht der hohen Sicherheitsrelevanz sowie der hohen rechtlichen und finanziellen Bedeutung der Ortungsqualität im Rahmen der genannten Verkehrsanwendungen gilt es, die Qualität der Ortungssysteme im Vorfeld zu beurteilen. Für die Beurteilung der Sicherheit und Zuverlässigkeit technischer Systeme existieren zahlreiche und bereits standardisierte Methoden. Eine übersichtliche Beschreibung bieten hierzu [149, S. 59-64] und [122, S. 29-52]. Für die Beurteilung der Messqualität im Sinne der metrologischen Leistungsfähigkeit, welche insbesondere die Messunsicherheitsbeurteilung als auch die messtechnische Prüfung unter Labor- und Realbedingungen einschließt, existiert bislang keine fundierte, abgeschlossene Methode. Dies ist der Fokus der folgenden Unterabschnitte, welche einen Überblick über das Begriffsverständnis der Ortung und der Ortungsgrößen, die aktuellen Methoden der Metrologie zur Bewertung von Messsystemen im Allgemeinen sowie über derzeitige Ansätze zur experimentellen Erprobung von Ortungssystemen im Speziellen bieten.

1.2.1 Definition der Ortung und ihrer Größen

In den Fachdisziplinen Geodäsie, Fahrzeugautomatisierung und Luft- und Raumfahrt-technik existieren verschiedene Auffassungen des Begriffs *Ortung*. In der Geodäsie wird erfahrungsgemäß von *Vermessung* anstelle von *Ortung* eines Messpunkts gesprochen. Bei der Vermessung spielt der zeitliche Verlauf – außerhalb von Langzeitbeobachtungen – keine Rolle. Da das Messobjekt stets als Punktmasse aufgefasst wird, wird die Orientierung nicht betrachtet.

Im Bodenverkehr und in der Luftfahrt wurde die Ortung stets im Kontext ihrer Hauptanwendung, der Navigation, aufgefasst. In der Luftfahrt wird neben dem Aufenthaltsort auch die Ausrichtung und – separat hiervon – der Bewegungszustand in die Ortung eingeschlossen [77, S. 202]. Die Einschränkung auf die reine Positionsbestimmung wird fälschlicher Weise als *Positionierung* bezeichnet [77, S. 202], die jedoch nicht die Bestimmung, sondern die Festlegung einer Position meint.

In [109] wird der Ausdruck *dynamische Ortung* im Hinblick auf die Ortung von Verkehrsmitteln, die natürlicherweise eine Dynamik aufweisen, wie folgt definiert: „*Ortung*

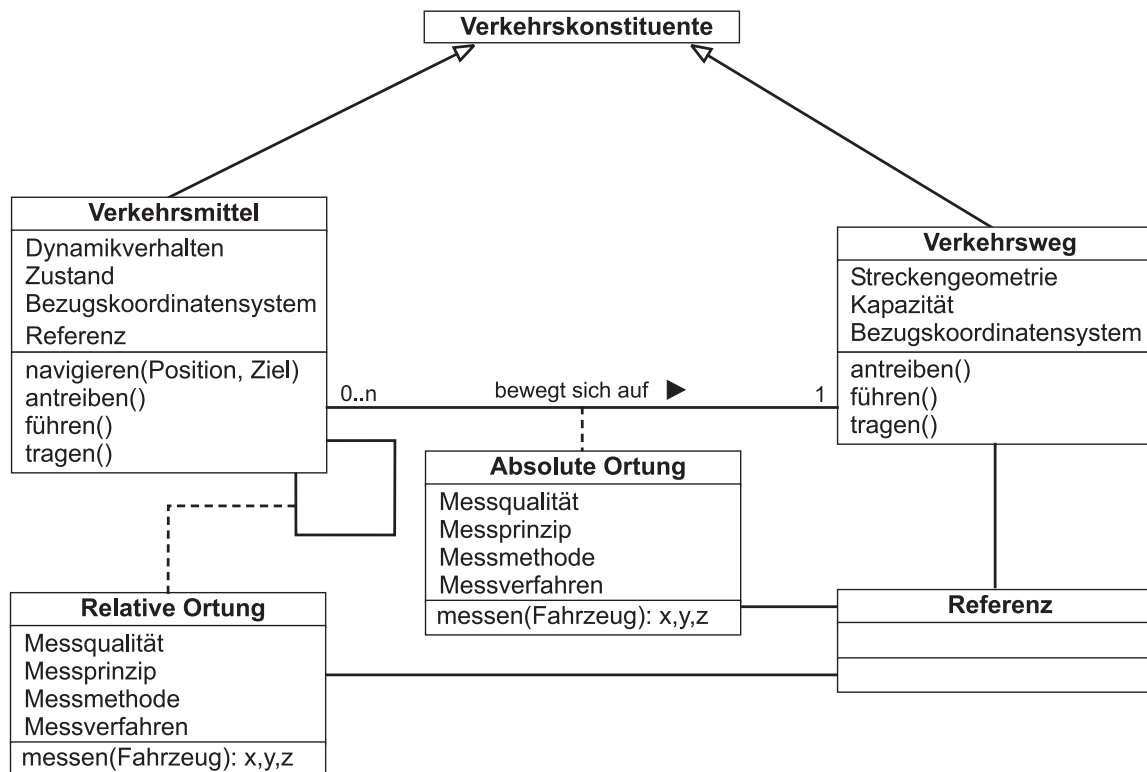


Abbildung 1.1: Formalisierung des Ortungsbegriffs in Kontext des Verkehrswesens [109]

ist die Bestimmung des Bewegungszustandes eines bestimmten Verkehrsmittels (d. h. Position, Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung bezogen auf einen Bezugspunkt des Verkehrsmittels) in einem Bezugssystem.“. Abbildung 1.1 illustriert die Definition. Hierbei wird zwischen *relativer Ortung*, bei der die Ortung des Verkehrsmittels relativ zu einem lokalen und möglicherweise bewegten Bezugssystem erfolgt, und *absoluter Ortung* unterschieden, bei der die Ortung in Bezug auf ein globales, ortsfestes Bezugssystem erfolgt [109]. Es wird darauf verwiesen, dass die Qualität der Ortung nur bestimmt werden kann, wenn eine Referenz auf dem Verkehrsweg installiert ist.

In der oben genannten Definition der Ortung wird die Erfassung des Orts ebenfalls auf die Erfassung des Bewegungszustands erweitert, wie es für den hier betrachteten Anwendungsfall der Fahrzeugortung sinnvoll ist. Der Bewegungszustand kann neben der Position (2D/3D) auch die Orientierung des Fahrzeugs (z. B. Gierwinkel) im Bezugssystem (*Pose*) sowie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung umfassen, welche stets vektoriell zu verstehen sind. Die Komplexität des Bewegungszustands orientiert sich an den Anforderungen des Anwendungsfalls.

Die Definition des Begriffs *Ortung* und der korrespondierenden Messgrößen im Kontext der satellitenbasierten Fahrzeugortung wird aktuell in verschiedenen Expertengremien auf nationaler (DIN Fachbereich 10, Deutsche Gesellschaft für Ortung und Navigation)

und auf internationaler Ebene (CEN/CENELEC TC5/WG1) diskutiert. Eine abschließende und allgemein akzeptierte Definition steht noch aus.

1.2.2 Metrologische Ansätze zur Beurteilung von Messsystemen

Ein Großteil der metrologischen Basisliteratur, wie z. B. das internationale Wörterbuch der Metrologie [20], die Normenreihe DIN 1319 [22, 23, 24, 27] sowie eine Vielzahl an metrologischen Veröffentlichungen bzgl. der Messunsicherheitsbeurteilung (z. B. [128, 121]) fokussieren auf klassischen Messaufgaben von Prüflaboren, d. h. der Messung – meist zeitinvarianter – Größen mit direktem Bezug zu SI-Einheiten (z. B. Masse oder Länge). Hierbei werden Begriffe genutzt, die nicht auf zeitvariante Größen und dynamische Messsysteme angewendet werden können oder hierfür nicht geeignet definiert sind. Ein Beispiel hierfür ist ein *Bediener*, welcher Messungen unter *Wiederholbedingungen* ausführt und die Messwerte mit einem *Normal* abgleicht. Doch wer ist der Bediener bei einem vollautomatischen Messsystem wie dem satellitenbasierten GPS? Was ist das Normal der Fahrzeugortung? Wie können Wiederholmessungen bei einer sich kontinuierlich verändernden Messgröße durchgeführt werden? Auch die Fragestellung wie die daraus gewonnenen Messwerte ausgewertet werden müssen, wenn die vorliegenden Messbedingungen variieren und nicht gemessen oder gar kontrolliert werden können, ist derzeit noch unbeantwortet. Diese Aspekte spielen insbesondere bei Messungen außerhalb der begrenzten Laborumgebung, wie bei der Fahrzeugortung, eine große Rolle.

Messungen können nicht ideal ausgeführt werden, da die exakten Messbedingungen unbekannt und unkontrollierbar sind. Die Quantifizierung dieser Unkenntnis ist seit jeher ein Kernarbeitsgebiet der Metrologie. Durch immer aufwändigere Anwendungen mit immer besser realisierten Messprozessen entstehen immer höhere Anforderungen an die Beurteilung der Qualität von Messprozessen [18]. Mittlerweile hat sich die Messunsicherheit als *das* Qualitätsmerkmal für die Beurteilung von Messprozessen herauskristallisiert [135]. Erst die Angabe einer Messunsicherheit ermöglicht eine Aussage über die Qualität des verwendeten Messverfahrens und einen Vergleich von Messergebnissen [102]. Ein Messergebnis „ohne Angabe der zugeordneten Messunsicherheit ist nur eine Vermutung“ [95]. Zur systematischen Beurteilung der Messunsicherheit wurde das sogenannte Standard-GUM-Verfahren erarbeitet und im internationalen Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (GUM, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* [61] bzw. DIN V ENV 13005 [29]) festgeschrieben. Die Dokumente *GUM-Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method* (SP1) [62] und *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ – Extension to any number of output quantities* (SP2) [67] ergänzen das Standardverfahren.

Die GUM-Methode kann in ihrer derzeitigen Form nur auf Messungen mit statischen Messsystemen und auf Messungen, bei der die betrachtete Messgröße innerhalb des Messzeitraums als konstant angenommen wird, angewendet werden. Bei Messungen im Rahmen dynamischer Prozesse (z. B. der Regelungen von dynamischen Systemen) werden derzeit keine GUM-konformen Messunsicherheitsanalysen durchgeführt, da die Messwerte der sich kontinuierlich verändernden Messgröße hierbei üblicherweise gefiltert und direkt von den Algorithmen der übergeordneten Anwendung weiterverarbeitet werden. Dies wird durch das aktuelle GUM-Verfahren nicht abgebildet [33]. Die Autoren des GUM waren sich der Grenzen des GUM bewusst, in dem es heißt: „*Es kann sich daher als notwendig erweisen, auf der Grundlage des vorliegenden Leitfadens weitere Normen zu entwickeln, die sich mit den speziellen Problemen bestimmter Bereiche des Messens oder den verschiedenen Anwendungen quantitativer Angaben der Messunsicherheit befassen.*“ [29, S. 7], was insbesondere für sicherheitsrelevante Messungen im Verkehr notwendig ist.

Bei der Betrachtung von Dynamik in Bezug auf Messungen wird in der Literatur zwischen der Messgrößendynamik [34] und der Messsystemdynamik [51] unterschieden. In der Norm DIN 1319-1 wird die Unterscheidung zwischen *statischer* und *dynamischer* Messung unglücklicherweise von der Zeitvarianz der Messgröße abhängig gemacht [22, S. 4-5]. Dynamik ist jedoch eine Systemeigenschaft und keine Größeneigenschaft [83, S. 39, S. 164], was in der Literatur häufig verwechselt wird. Zum besseren Verständnis wird im Einklang mit der Systemtheorie im Folgenden anstelle der Bezeichnung Messgrößendynamik der Ausdruck *zeitvariante Messgröße* verwendet. In der Literatur wird eine Größe als zeitvariante Größe definiert, wenn sich ihr Wert in Bezug auf die Dauer der Messung signifikant verändert [53]. Ein Messsystem besitzt eine Dynamik, wenn es eine Speichereigenschaft aufweist [51]. Analog dazu wird die Messung als statisch angesehen, falls die Werte der gemessenen Größen unabhängig von früheren Werten sind. Die Analyse von dynamischen Systemen ist zwar im Bereich der Signalverarbeitung [96] und der Regelungstechnik [83] gut erforscht, die Übertragung der Kenntnisse auf das Fachgebiet der Metrologie stellt jedoch nach wie vor eine Herausforderung dar [51].

In vorangegangenen Arbeiten [34, 52, 33] wurde die Bedeutung der Messunsicherheitsbeurteilung im Kontext der zeitvarianten Messgrößen, der dynamischen Messgeräte und der digitalen Messdatenfilterung erkannt. In [80] wird dabei die Berücksichtigung des GUM als „*überlebenswichtiges Interesse*“ für die zu entwickelnden Ansätze gefordert. In [118] wird ebenfalls die Notwendigkeit von Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung bei dynamischen Messsystemen herausgestellt. Hierbei wird das Zustandsraummodell aufgrund seiner Vorteile bei einer späteren Implementierung als das vielversprechendste Beschreibungsmittel genannt. Der Beitrag zeigt ein Grundkonzept auf, bei dem nicht nur die Eingangsgrößen, sondern auch die Zustandsgrößen durch zeitvariante Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beschrieben werden. Die Frage, mit welchem Algorith-

mus Messunsicherheiten durch das dynamische Messsystem propagiert werden, bleibt jedoch offen. Des Weiteren ist die Ausgangsgleichung von Zustandsraummodellen entgegen der in [118] getroffenen Annahme in der Regel nicht invertierbar, sodass aus einem gewonnenen Wert der Ausgangsgröße nicht unmittelbar auf den Zustand des Messsystems oder den ursprünglichen Eingangswert geschlossen werden kann. Einen weiteren Ansatz für die Beurteilung der Messunsicherheit bei vorliegender Dynamik zeigt [33]. Hierbei wird das Verhalten eines dynamischen Messinstruments als Verzögerungsglied zweiter Ordnung im Frequenzbereich mit dem Ziel modelliert, die durch das dynamische System eingebrachte Verfälschung des Messwerts zu kompensieren. Dies erfordert jedoch das Wissen über eine obere Schranke für die Frequenzanteile der Messgröße und ignoriert die Behandlung von absichtlich in die Messkette eingebrachter Dynamik wie z. B. durch einen Tiefpass-Filter.

Im Gegensatz zur Messung zeitinvarianter Größen muss das Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung in Abhängigkeit der aktuellen Eingangsgrößen und des Zustands des dynamischen Messsystems für jeden Zeitschritt erneut durchgeführt werden. Die Messunsicherheit kann nicht im Vorfeld der Messung über den gesamten Zeithorizont bestimmt werden. Daher kann die Beurteilung der zeitvarianten Messunsicherheit grundsätzlich nur rechnergestützt erfolgen. Insbesondere in den Fällen, bei denen die gefilterten Messdaten direkt weiterverarbeitet werden, muss die beurteilte Messunsicherheit in Echtzeit bereitgestellt werden. Diese Funktionalität wird von den derzeit verfügbaren Rechnerprogrammen zur Messunsicherheitsbeurteilung ([155, 85, 97]) nicht abgedeckt. Des Weiteren wird in [53] die Aufbereitung neuentwickelter Methoden in Form von Rechnerprogrammen gefordert, um so die Verbreitung der Methoden zu fördern und die Komplexität für deren Nutzer zu reduzieren.

Fazit. Der Einsatz von Fahrzeugortungssystemen im Verkehr erfordert, insbesondere aufgrund seiner Sicherheitsrelevanz und seiner rechtlichen Bedeutung, eine Beurteilung der Messunsicherheit nach einem allgemein akzeptierten und systematischen Verfahren. Hierfür hat sich das GUM-Verfahren etabliert. Bei der Messunsicherheitsbeurteilung wird derzeit nur eine statische Modellfunktion f betrachtet, welche die zeitinvarianten Eingangsgrößen X_1, \dots, X_R unmittelbar auf die Messgröße Y abbildet (Tabelle 1.1). Außerhalb von Laborbedingungen ist mit einer Änderung der Messbedingungen, d. h. mit zeitvarianten Größen $\mathbf{X}(k)$, zu rechnen. Selbst bei konstanten Messbedingungen kann sich der Wert der Messgröße in nicht vorhersehbarer Weise ändern, was oft als Rauschprozess $\Psi(k)$ modelliert wird. Zudem ist die Weiterverarbeitung von Messwerten durch ein dynamisches System mit einem inneren Zustand \mathbf{Z} bei vielen Anwendungen nicht mehr wegzudenken. Daher muss das Verfahren auf zeitvariante bzw. dynamische Modellstrukturen erweitert werden (vgl. Tabelle 1.1). Die Fahrzeugortung stellt somit ein Beispiel für eine ganze Klasse von Messaufgaben dar, auf die das GUM-Verfahren nicht direkt angewendet werden kann. Die Ergänzungen der Leitfadensreihe zeigen, dass die

Tabelle 1.1: Klassifizierung von Messfunktionen

Messsystem	Zeitinvariante Messgröße	Zeitvariante Messgröße
	$Y = c_1 X_1 + \dots + c_R X_R$ (Lineare Unsicherheitsfortpflanzung: Standard-GUM-Verfahren)	$Y(k) = f(\mathbf{X}(k))$
Statisch	$Y = f(\mathbf{X})$ (Nichtlineare Fortpflanzung von Wahr- scheinlichkeitsdichtefkt.: GUM-SP 1)	$Y(k) = f(\mathbf{X}) + \Psi(k)$ (Unsicherheitsbeurteilung nicht standardisiert)
Dynamisch	existiert nicht	$Y(k) = f(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))$ (Unsicherheitsbeurteilung nicht standardisiert)

Problematik bzgl. der Dynamik bislang noch keine Rolle bei der Standardisierung spielt. Dem entsprechend wurden die genannten Aspekte bislang auch nicht bei den zwingend notwendigen Programmen zur rechnergestützten Messunsicherheitsbeurteilung berücksichtigt.

1.2.3 Messtechnische Ansätze zur Beurteilung von Fahrzeugortungssystemen

Neben der Anwendung formaler metrologischer Methoden beinhaltet die Bewertung von Fahrzeugortungssystemen die Realisierung einer messtechnischen Einrichtung, die es erlaubt, die Erfüllung der Qualitätsanforderungen zu überprüfen. Die Forschungs- und die Industrie hat eine Reihe von technischen Einrichtungen zur Bewertung von satellitenbasierten Ortungssystemen entwickelt. Diese können in simulationsbasierte und experimentelle Ansätze unterschieden werden.

Simulationsbasierte Untersuchungen

In [5, S. 51-55] wird der Ansatz der Simulation eines Ortungsszenarios im Schienenverkehr verfolgt. Hierbei können verschiedene Satellitenkonstellationen und einfache Hindernisse abgebildet werden. Das Verhalten der Atmosphäre, des Empfängers und des darin integrierten Filters sowie des Einflusses der verwendeten Antenne wird nicht berücksichtigt. Eine weitere mögliche Vorgehensweise bei der Empfängerbeurteilung ist die Hardware-in-the-loop-Simulation, bei welcher der Empfänger mit künstlich erzeugten Satellitensignalen gespeist wird. Diese können mit Hilfe von Signalgenerato-

ren erzeugt werden. Hersteller wie Spirent oder ifen bieten hierfür sogenannte GNSS-Simulatoren an, mit denen Satellitenkonstellationen, Atmosphäreneffekte und Trajektorien nachgebildet werden können [43, 150]. Die sich ergebenden Satellitensignale werden an einen realen, an den Simulator angeschlossenen Empfänger ausgegeben, um dessen Verhalten zu analysieren. Allerdings bereitet auch bei diesem Ansatz die Modellierung der Umgebung um den Satellitenempfänger große Schwierigkeiten. In [110] wurde gezeigt, dass die Abbildung realer Umgebungen in einem für eine aussagekräftige Erprobung von Empfängern hinreichendem Maß nicht möglich ist.

Fazit. Simulationsbasierte Ansätze versprechen eine kostengünstige und schnelle Untersuchung der Ortungsqualität. Allerdings muss hierfür das komplette Verhalten des Ortungssystems inklusive aller Messbedingungen, wie z. B. Troposphäre, Ionosphäre und Hindernisse in der Umgebung, hinreichend detailliert modelliert werden. Es ist keine Simulationsumgebung bekannt, die dies erfüllt. Aufgrund der hohen Systemkomplexität erscheint die Entwicklung einer realitätsnahen Simulationsumgebung als unwahrscheinlich.

Experimentelle Versuchseinrichtungen

Zu den umfangreichsten Einrichtungen für die messtechnische Beurteilung von satellitenbasierten Ortungsdiensten gehört die „Galileo Test and Development Environment“ (GATE) in Berchtesgaden, die seit 2008 in Betrieb ist. Dort emulieren Pseudolites die Galileo-Satelliten. Bei den Pseudolites handelt es sich um auf dem Testgelände ortsfest positionierte Transpondereinheiten, die spezifikationskonforme Galileo-Signale aussenden. Mit diesen Pseudolites wird ein ca. 65 km² großes Testgelände abgedeckt [154, 48]. Weitere GATE-Einrichtungen nach demselben Prinzip fokussieren jeweils auf eine bestimmte Verkehrsdomäne. Die SEA GATE am Rostocker Hafen bietet die Möglichkeit, die Galileo-Ortung bei Anwendungen wie dem Anlegen an die Kaimauer oder dem Navigieren im engen Hafenbecken zu erproben [32]. Bei der automotiveGATE in Aldenhoven können Galileo-basierte Anwendungen in typischen Situationen des Straßenverkehrs erprobt werden [74, 75]. Diese Einrichtung befindet sich, ebenso wie die railGATE-Einrichtung in Wegberg-Wildenrath [104], noch im Aufbau. Der vierte Verkehrsträger, die Luftfahrt, wird durch die aviationGATE-Versuchseinrichtung am Forschungsflughafen Braunschweig abgedeckt. Sobald der Aufbau vollständig abgeschlossen ist, werden die Pseudolites den Luftraum über einem 5500 km² großen Gebiet abdecken [8]. Ein ähnliches Konzept wie die GATE-Einrichtungen verfolgt die *Galileo Test Range* beim Rom [44].

Aufgrund der derzeitigen Unverfügbarkeit der vollständigen Galileo-Konstellation kann nicht verifiziert werden, inwieweit die emulierte Ortung mit der zukünftigen Galileo-Ortung unter realen Bedingungen übereinstimmt. Beispielsweise kann die Auswirkung der Satellitenbewegung oder die der Atmosphäre nur näherungsweise nachgebildet werden, da die Pseudolites ortsfest sind und ihre Signale unterhalb der Atmosphäre ausstrahlen.

Bei der Versuchseinrichtung des *GRACE – GNSS Research Applications Centre of Excellence* [84] handelt es sich um ein spurgebundenes Fahrzeug, welches auf dem Dach des Forschungsgebäudes installiert ist. Hiermit kann das Verhalten existierender Satellitenortungssysteme auf stark begrenztem Raum und festem Weg erprobt werden.

Eine weitere Vorgehensweise sind sogenannte *Record and Playback* Systeme. Diese können die während eines Realversuchs empfangenen Satellitensignale aufzeichnen und erneut wiedergeben und so die Wiederholung der Messung mit verschiedenen Empfängern oder Empfängereinstellungen ermöglichen [92]. Somit ist ein relativer Vergleich von Empfängern untereinander möglich. Die Abweichung zur tatsächlichen Absolutposition ist nicht bestimmbar.

Problematisch bei allen genannten Ansätzen ist, dass sie keine Möglichkeit zur Generierung einer von der satellitenbasierten Ortung unabhängigen Referenzposition bieten. Der häufig verfolgte Ansatz (z. B. in [49]), ein Messsystem mit Hilfe einer auf dem selben physikalischen Prinzip beruhenden Referenz zu beurteilen, ist nicht zielführend, da hierdurch die systematischen Einflüsse auf die Messung nicht erkannt werden können. Eine physikalisch unabhängige Referenz ist eine wichtige Voraussetzung für die Verifizierung und Kalibrierung von Ortungssystemen sowie die Akkreditierung von Prüflaboren.

Um die Qualität der GPS-basierten Fahrzeugortung mit Hilfe einer von GPS unabhängigen Referenz untersuchen zu können, wurde in [64] eine spurgebundene Modellautorennbahn aufgebaut. Auf den mit bis zu 2 m/s fahrenden Modellautos wurden GPS-Empfänger angebracht. Die Messabweichung wird mittels drei Referenzpunkten auf der Strecke bestimmt. In [147] wurde ein GPS-Empfänger auf einen spurgeführten Schlitten montiert, der wiederholbare Experimente mit verschiedenen Beschleunigungsprofilen mit bis zu 40 m/s² erlaubt. Der Schlitten wird dabei durch einen Schrittmotor bewegt, sodass die tatsächliche Position auf wenige Millimeter genau bestimmt werden kann. Allerdings erreicht der Schlitten nach maximal einer Sekunde das Ende der Schiene, wodurch sich der im Empfänger verwendete Filteralgorithmus nicht auf die Beschleunigung einstellen kann. Bei beiden Ansätzen handelt es sich um Referenzsysteme in kleinem Maßstab, mit denen nicht die im Verkehr typischen Beschleunigungen abgebildet werden können. Die Fragestellung, wie sich die gewonnenen Ergebnisse auf den realen Verkehr übertragen lassen, bleibt unbeantwortet.

In [17] wurde frühzeitig die Notwendigkeit einer von satellitenbasierten Ortungssystemen physikalisch unabhängigen Referenz erkannt. Die Referenz muss sich hierbei realitätsnah an der in den jeweiligen Verkehrsdomänen auftretenden Dynamik orientieren. Dieses Grundprinzip wurde bei der Entwicklung von Referenzmessaufbauten am Institut für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik intensiv verfolgt.

Im BMBF-Projekt SATNAB konnte ein erster Messaufbau zur Bewertung der Positionsmessqualität entwickelt werden [17]. Als Referenz wurden hierbei georeferenzierte aber aufwändig zu verlegende optische Straßenmarkierungen genutzt, sodass eine Versuchsstrecke mit einer Länge von lediglich 60 m realisiert werden konnte. In [45] wurde die Notwendigkeit für einen verkehrsdomänenübergreifenden Ansatz zur Entwicklung von Referenzsystemen aufgezeigt. Hierfür wurde am Institut für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik der Straßen- und Schienenverkehr betrachtet. Im BMWi-Projekt DemoOrt [4] wurden geeignete Referenzstrecken ausgewählt, um die satellitenbasierte Ortung von Eisenbahnen auch unter schwierigen Messbedingungen zu erproben. Als physikalisch unabhängige Referenz wurden ein Radimpulsgeber zur Ermittlung der Fahrtrichtung, ein Doppler-Radar zur Geschwindigkeits- und Wegmessung sowie ein RFID-System zur Korrektur der Drift realisiert [93]. Bei diesem Messaufbau muss für jede Messfahrt die aktuelle Streckenbelegung berücksichtigt werden, was die Zeit, die für Messfahrten zur Verfügung steht, einschränkt. Des Weiteren müssen hohe Kosten für einen entsprechend ausgestatteten Messzug und dessen aufwändige Überführung zur Messstrecke berücksichtigt werden, was sich als erheblicher Nachteil herausgestellt hat. Zusätzlich kann mit diesem räumlich stark ausgedehnten Messaufbau prinzipiell nur die Qualität von global verfügbaren, d. h. satellitenbasierten, Ortungssystemen beurteilt werden.

Fazit. Die Übersicht zeigt, dass bereits Ansätze für simulationsbasierte Untersuchungen sowie für Versuchsanlagen zur messtechnischen Beurteilung von satellitenbasierten Ortungssystemen erarbeitet wurden. Alle simulationsbasierten Ansätze weisen jedoch das Grundproblem auf, dass die Realitätsnähe der Simulationsergebnisse nicht nachgewiesen werden kann. Viele Versuchseinrichtungen zur Untersuchung der Messqualität unter realen Bedingungen bieten nicht die Möglichkeit, Referenzwerte mit einem physikalisch unabhängigen Messprinzip zu generieren. Die in DIN EN ISO/IEC 17025 geforderte Beurteilung der Messunsicherheit des Referenzaufbaus wird bei allen bekannten Ansätzen vernachlässigt. Es wird deutlich, dass keine allgemeingültigen Anforderungen an Referenzsysteme und keine systematischen Methoden zum Entwurf einheitlicher Prüfzenarien erarbeitet wurden. Derzeit existieren weder entsprechend ausgestattete Prüflabore noch die erforderlichen Prüfrichtlinien. Diese offenen Fragestellungen werden in der vorliegenden Arbeit behandelt, wie die folgende Zielsetzung zeigt.

1.3 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Beantwortung der Fragestellung, was unter dem Begriff *Messqualität* bei Messungen zeitvarianter Größen zu verstehen ist und wie diese Qualität am Beispiel der satellitenbasierten Fahrzeugortung quantifiziert werden kann. Die Zielsetzung lässt in zwei Teilziele gliedern.

Das erste Teilziel besteht in der Definition des Begriffs *Messqualität* unter Berücksichtigung der existierenden Begriffswelten der Metrologie und der technischen Zuverlässigkeit. Die Erreichung dieses Ziels führt auf eine formalisierte Beschreibung der Messqualität, welche in der Literatur – wie in Abschnitt 1.2 gezeigt – bislang nicht existiert.

Das zweite Teilziel besteht aus einem Referenzsystem für die Fahrzeugortung zur Quantifizierung der Messqualität und einer Methode für dessen normgerechte messtechnische Beurteilung. Dies schließt die Spezifizierung von Anforderungen an einen praxisnahen Referenzmessaufbau, dessen Realisierung, Erprobung und metrologische Rückführung auf ein Normal ein. Durch die systematische Beurteilung des zu entwickelnden Referenzsystems nach den zu definierenden Komponenten der Messqualität wird die Bewertung von Referenzsystemen für die satellitenbasierte Ortung (vgl. Abschnitt 1.2) auf eine metrologisch fundierte Basis gestellt und hierdurch vergleichbar.

Zur verständlicheren Einordnung der Zielsetzung veranschaulicht Abbildung 1.2 die Teilziele dieser Arbeit im Kontext der Konformitätsbewertung, wie sie an dieser Stelle aufgefasst wird. Die von der Zielsetzung fokussierten Elemente sind kursiv dargestellt. Bei der *Konformitätsbewertung* wird die Fragestellung beantwortet, ob ein Messsystem für einen betrachteten Anwendungsfall geeignet ist. Sie gliedert sich in die Teilprozesse *Qualifizierung*, *Verifizierung* und *Validierung*.

Die *Qualifizierung* eines Messsystems besteht aus der Durchführung eines Prüfprozesses, welcher in Qualitätsmaßzahlen resultiert. Hierfür sind geeignete Qualitätsmaße zur Quantifizierung der Messqualität zu definieren bzw. bestehende ggf. zu erweitern. Dies trifft insbesondere auf das existierende GUM-Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung zu, das auf zeitlich konstante Messgrößen beschränkt ist und daher für die Qualifizierung von Fahrzeugortungssystemen auf zeitabhängige Größen, gemessen mittels dynamischen Messsystemen, erweitert werden muss. Die Durchführung eines Prüfprozesses bedingt die Spezifizierung eines Prüfzenarios. Die Frage in welchem Prüfzenario, d. h. unter welchen Messbedingungen, die Messqualität der satellitenbasierten Fahrzeugortung zu bestimmen ist, steht aus Gründen der Komplexitätsreduktion nicht im Fokus dieser Arbeit und wird nur insoweit behandelt, wie es für die Erprobung des zu entwickelnden Referenzsystems im Rahmen eines exemplarischen Prüfprozesses

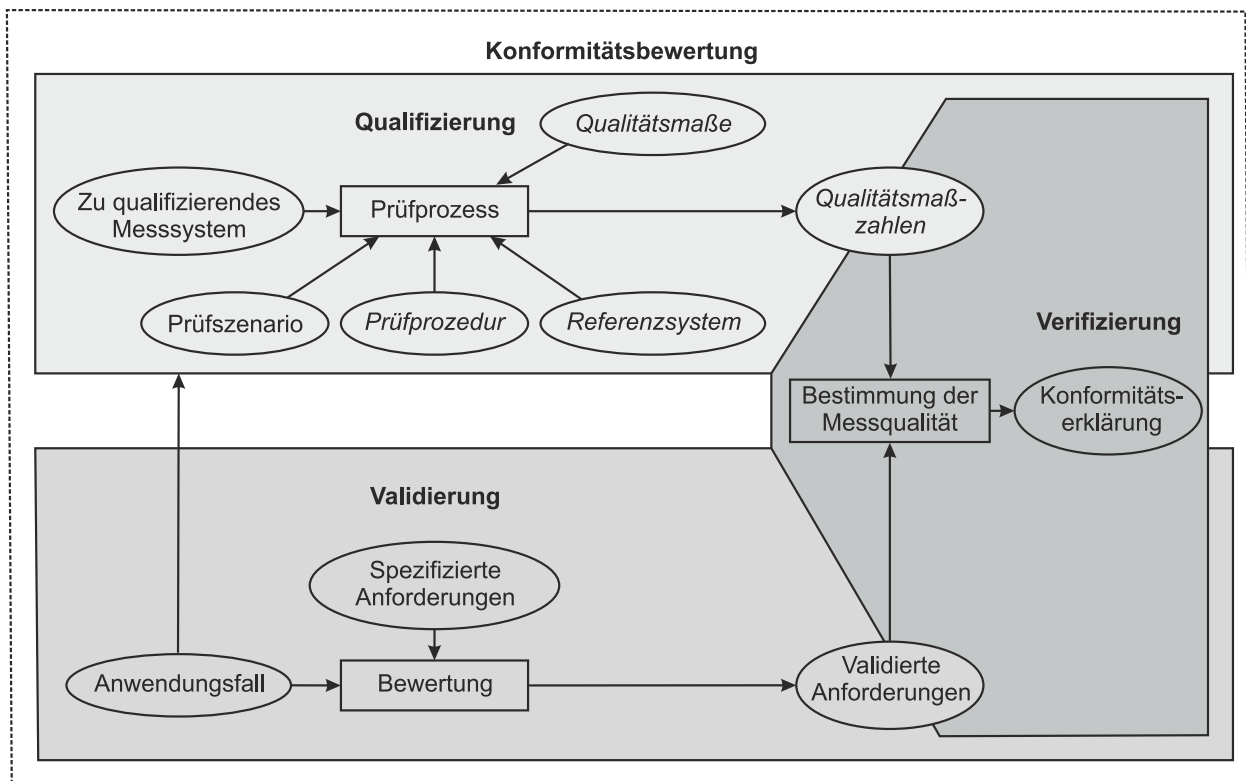


Abbildung 1.2: Zusammenhang zwischen Qualifizierung, Verifizierung und Validierung

notwendig ist. Eine weitere Ressource des Prüfprozesses ist die Prüfprozedur, welche vereinheitlichte Begriffsdefinitionen, Anforderungen an das Referenzsystem und dessen Messverfahren umfasst und zur Spezifizierung, Durchführung sowie der Auswertung eines exemplarischen Prüfprozesses ausführlich zu behandeln ist. Des Weiteren bedarf der Prüfprozess der Entwicklung eines Referenzmesssystems. Im Hinblick auf die Fahrzeugortung wird hierbei zwischen einem ortsfesten Referenzsystem, das als *Urnormal* den metrologischen Anforderungen Rechnung trägt, und einem mobilen *Gebrauchsnormal* unterschieden, das den praxisnahen Anforderungen eines Einsatzes vor Ort unter den spezifizierten Messbedingungen genügt. Bei der Qualifizierung wird davon ausgegangen, dass das Messsystem intakt und in der Lage ist, seine volle Funktionsfähigkeit zu erbringen.

Entgegen der Definition in [20, 2.45] wird die *Validierung* in dieser Arbeit als eigenständiger Teilprozess und nicht als Spezialfall der Verifizierung angesehen. Dies befindet sich im Einklang mit der in den Ingenieurwissenschaften weit verbreiteten Sichtweise [107, S. 269]. Die Validierung beschäftigt sich mit der Fragestellung, ob die spezifizierten Anforderungen an die Messqualität des zu qualifizierenden Messsystems geeignet sind, um eine Aussage über dessen Tauglichkeit für den beabsichtigten Anwendungsfall treffen zu können. Dieser Tauglichkeitsnachweis ist Voraussetzung für die Verifizierung und wird vor dieser erbracht. Darüber hinaus orientiert sich die Auswahl des zu qualifizie-

renden Messsystems und die genaue Ausprägung des Prüfprozesses und seiner weiteren Ressourcen am Anwendungsfall.

Bei der *Verifizierung* [20, 2.44] werden die zuvor ermittelten Qualitätsmaßzahlen mit den validierten Anforderungen an die Messqualität des zu qualifizierenden Messsystems verglichen. Der Grad mit dem das zu qualifizierende Messsystem diese Anforderungen erfüllt wird in der *Konformitätserklärung* festgehalten. Die Verifizierung wird als *Zertifizierung* bezeichnet, falls diese durch ein akkreditiertes Prüflabor – die Zertifizierungsstelle – durchgeführt wird (vgl. [46, S. 114]). In diesem Fall ist das Ergebnis der Konformitätsbewertung ein Zertifikat.

Aus der oben genannten Zielsetzung leitet sich unmittelbar die Struktur der vorliegenden Arbeit ab. Der folgende Abschnitt 1.4 bietet eine Übersicht über die einzelnen Kapitel der Arbeit.

1.4 Struktur der Arbeit

In [129, S. 16] wird die Empfehlung ausgesprochen, bei meteorologisch geprägten Ausarbeitungen eine konsistente und klar definierte Begriffsstruktur zur Vermeidung von sprachbedingten Missverständnissen voranzustellen. Daher werden in Kapitel 2 zunächst Fachbegriffe im Kontext der Prüfung von Fahrzeugortungssystemen definiert und anschließend die grundlegenden metrologischen Fachbegriffe gemäß den offiziellen Definitionen rekapituliert. Darauf aufbauend wird eine formale Axiomatisierung des für die vorliegende Arbeit zentralen Begriffs *Messqualität* vorgenommen. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf die Herausarbeitung der Unterschiede zwischen den Konzepten *Messgenauigkeit* und *Messunsicherheit* gelegt, welche die wesentlichen Komponenten der Messqualität darstellen und seit langem in der metrologischen Fachwelt kontrovers diskutiert werden. Das Kapitel schließt mit der Definition von Maßen zur Quantifizierung der Messqualität.

In Kapitel 3 wird der Wandel von der klassischen Fehlerrechnung zum Messunsicherheitsansatz herausgearbeitet. Anschließend werden die standardisierten Methoden zur Messunsicherheitsbeurteilung zusammenfassend dargelegt, gegenübergestellt und beurteilt.

Das gängigste Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung wird in Kapitel 4 auf die Klasse der zeitvarianten Größen und der dynamischen Messsysteme erweitert, um so auch zeitvariante Messgrößen, gemessen mit dynamischen Messsystemen, berücksichtigen zu können. Hierbei wird ein Zustandsraummodell für die Messunsicherheit bei dyna-

mischen Messsystemen hergeleitet und das Verhalten der Messunsicherheit hinsichtlich der Stabilität an zwei Beispielen illustriert.

Kapitel 5 beschreibt ein ortsgebundenes Referenzsystem für die Fahrzeugortung, welches die Brücke von der Messung ortsfester Punkte zu der Messung einer bewegten Position schlägt und in dieser Arbeit als Normal für die Fahrzeugortung dient. Die ausführlich dargestellte Messunsicherheitsbeurteilung ermöglicht die Nutzung des Normals für die Kalibrierung des zu entwerfenden mobilen Referenzsystems, um so systematische Einflüsse auf dessen Referenzposition zu identifizieren. Die nach dem in Kapitel 3 dargestellten Verfahren beurteilte Messunsicherheit wird mittels einer eigens entwickelten MATLAB-Toolbox verifiziert. Das Kapitel schließt mit einem Nachweis der Erfüllung der in Kapitel 2 definierten Messqualitätseigenschaften.

Kapitel 6 stellt den Entwurf eines mobilen Referenzsystems dar. Das mobile Referenzsystem orientiert sich an den Anforderungen der Praxis bei der Durchführung repräsentativer Prüfzenarien. Zur Erfüllung dieser Anforderungen werden Ortungstechnologien gegenübergestellt und hinsichtlich ihrer Tauglichkeit beurteilt. Anschließend wird die Leistungsfähigkeit des realisierten mobilen Messaufbaus bestimmt indem die Messergebnisse mit denen des in Kapitel 5 vorgestellten Normals verglichen werden.

Kapitel 7 demonstriert wie die definierte Messqualität am Beispiel der GPS-basierten Fahrzeugortung mit dem in Kapitel 6 beschriebenen Referenzsystem quantifiziert werden kann. Hierbei wird der Einfluss der Fahrzeugdynamik auf die Messqualität anhand eines exemplarischen Prüfzenarios analysiert.

Kapitel 8 fasst die vorliegende Arbeit zusammen. Zudem bietet das Kapitel einen Ausblick auf weiterführende Problemstellungen und mögliche Lösungsansätze.

KAPITEL 2

Formalisierung metrologischer Fachbegriffe

Dieses Kapitel bietet eine Hilfestellung die häufig thematisierte Problematik [109, 113] einer unscharfen Begriffswelt zu überwinden. Bei der erstmaligen Verwendung von Fachbegriffen im Text werden diese in Kursivschrift gesetzt. Dies verdeutlicht, dass es sich hierbei um wohldefinierte metrologische Begriffe handelt, die mit Umsicht und Sorgfalt benutzt werden müssen, um eine allgemeine Vergleichbarkeit von metrologischen Dokumenten sicherzustellen und Missverständnisse durch eine babylonische Sprachverwirrung zu vermeiden. In Abschnitt 2.1 werden zunächst die wesentlichsten Fachbegriffe in Bezug auf die Prüfung von Fahrzeugortungssystemen definiert. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 allgemeine metrologische Begriffe zur Durchführung von Messungen und der Angabe von Messergebnissen erläutert. Dabei wird nicht nur auf die bestehenden Definitionen [20] zurückgegriffen, sondern zusätzlich die bestehenden Relationen herausgearbeitet, um so ein vollständiges Begriffsverständnis zu erreichen. Hier auf aufbauend wird in Abschnitt 2.3 nach dem Schema des Terminology-Engineering [113, 124] eine Axiomatisierung des Begriffs *Messqualität* durchgeführt. Terminology-Engineering bezeichnet hierbei die Beschreibung von Begriffen durch qualitative Eigenschaften, Merkmalen und Größen sowie ihren Werten und Einheiten. Durch die sich daraus ergebende Hierarchisierung und der in Abschnitt 2.4 eingeführten Maße zur Quantifizierung wird der Begriff Messqualität eindeutig beschrieben.

2.1 Definition von Fachbegriffen für die Prüfung von Fahrzeugortungssystemen

In Abschnitt 1.3 wurde bereits anhand von Abbildung 1.2 die Einordnung des *Prüfprozesses* und seiner Ressourcen im Kontext der Qualifizierung in allgemeiner Form dargestellt. Die dortigen Erläuterungen werden durch die im Folgenden aufgeführten Begriffsdefinitionen für den Anwendungsfall der Prüfung satellitenbasierter Fahrzeugortungssysteme vervollständigt.

Das zu prüfende *Ortungssystem* generiert die Positionsmesswerte, deren Messqualität im Rahmen eines Prüfprozesses bestimmt wird. Im hier behandelten Beispiel eines satellitenbasierten Ortungssystems schließt dies nicht nur die Satelliten und die Empfangstechnik, sondern auch die empfängerinternen Algorithmen zur Verarbeitung der Messwerte sowie die verwendete Antenne mit ein.

Ein *Prüfszenario* definiert konkrete *Prüfbedingungen*, wie beispielsweise das Prüfgelände, das Prüffeld, die Prüfspur und die Prüftrajektorie, welche bei einer Qualifizierung eines bestimmten Ortungssystems verwendet werden sollen. Das *Prüfgelände* ist der Ort, an dem der Prüfprozess durchgeführt wird. Das Prüfgelände kann durch seine geometrischen Ausmaße, seine Bebauung oder seine topografischen Eigenschaften das Ergebnis der Qualifizierung maßgeblich beeinflussen. Auf dem Prüfgelände befindet sich das *Prüffeld*, das durch die räumliche Abdeckung des Referenzsystems bestimmt wird. Die *Prüfspur* definiert eine Sequenz von Wegpunkten, an denen die für den Prüfprozess spezifizierten Messbedingungen erfüllt sind. Die dazu korrespondierende *Prüftajektorie* ist durch ein Position-Zeit-Signal bzw. ein Geschwindigkeit-Zeit-Signal definiert.

Die wesentliche Voraussetzung für die Durchführung eines Prüfprozesses stellt seine detaillierte Beschreibung – die *Prüfprozedur* – dar. Diese beinhaltet Begriffsdefinitionen, eine generische Beschreibung von Prüfszenarien, Anforderungen an die zu nutzende Referenz sowie eine Beschreibung des Vorgehens zur Aufbereitung der Messwerte. Aus den Messwerten muss eine Schlussfolgerung bzgl. der Messqualität gezogen werden. Diese Quantifizierung der Messqualität geschieht mittels *Qualitätsmaßen*, d. h. Rechenvorschriften, die auf die gemessenen Werte angewendet werden und so auf indirekt gemessene Qualitätsmaßzahlen führen.

Eine weitere Ressource eines Prüfprozesses stellt das *Referenzsystem* dar, dessen Aufgabe in der Durchführung einer Referenz-Ortung besteht. Das Referenzsystem umfasst mehrere Komponenten: das *Prüffahrzeug*, das als Träger für die fahrzeugseitigen Komponenten des zu qualifizierenden Ortungssystems (z. B. GPS-Empfänger) und des Referenzortungssystems dient, das *Referenzortungssystem*, welches die Position des Fahr-

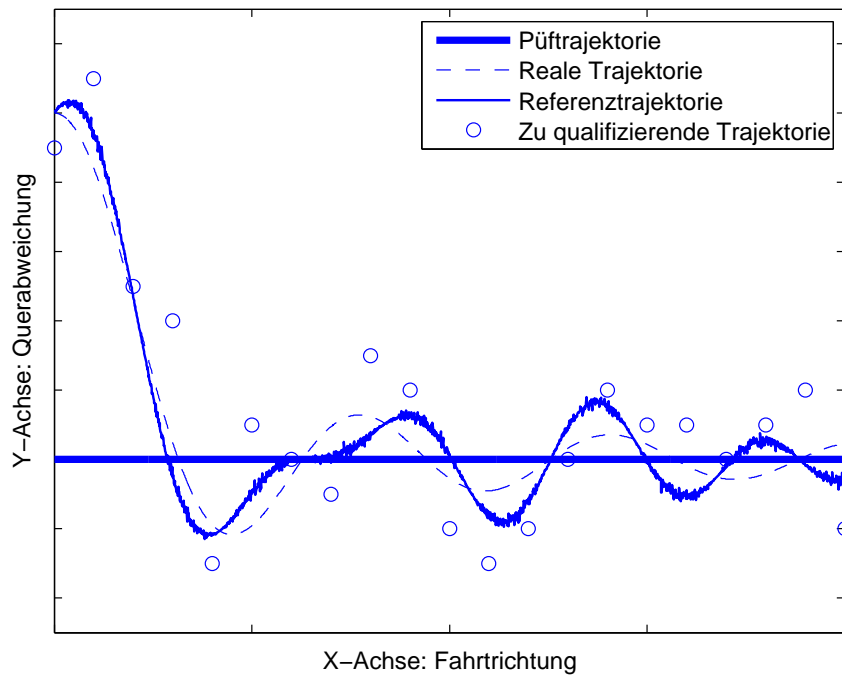


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der in einem Prüfprozess auftretenden Trajektorien

zeugs ermittelt, und die *Längs-* und *Spurführung*, welche je nach Anforderung ggf. automatisiert werden müssen.

Während eines Prüfprozesses treten neben der genannten Prüftrajektorie weitere Trajektorien auf, welche sorgsam unterschieden werden müssen. Abbildung 2.1 [140] zeigt in schematischer Weise die weiteren in einem Prüfprozess auftretenden Trajektorien am Beispiel einer Geradeausfahrt entlang der *X*-Achse. Die Prüftrajektorie wird beim Entwurf des Prüf szenarios spezifiziert. Das Prüffahrzeug kann der Prüftrajektorie bzw. Prüfspur nur näherungsweise folgen (realisierte Trajektorie). Das Ergebnis der Messung der realisierten Trajektorie ist die Referenztrajektorie bzw. Referenzstrecke. Da die Messungen und Berechnungen zur Generierung der Referenztrajektorie stets mit Unsicherheiten behaftet sind, entsteht eine Abweichung zwischen der Referenztrajektorie und der tatsächlich gefahrenen Trajektorie. Die vierte Trajektorie besteht aus dem Verlauf der Fahrzeugposition, die von dem zu qualifizierenden Ortungssystem berechnet wird. Die Positionswerte stehen entsprechend der Messrate des Systems nur zu diskreten Zeitpunkten zur Verfügung.

Die Abweichung zwischen der Referenztrajektorie und der realisierten Trajektorie könnte als Maß für die Messgenauigkeit des Referenzsystems herangezogen werden. Allerdings sollen während einem Prüfprozess nicht beliebige Trajektorien, sondern die zuvor

definierten Prüftrajektorien gefahren werden, an denen die im Prüfszenario spezifizierten Prüfbedingungen gelten. Dies bedeutet, dass letztlich die zu gleichen Zeitpunkten gebildete Differenz zwischen der Referenztrajektorie und der Prüftrajektorie das Maß für die metrologische Qualität des Referenzsystems darstellt. Nach diesen Vorbetrachtungen kann der zentrale Begriff *Referenzsystem* definiert werden.

Definition 1 (Referenzsystem): *Eine technische Einrichtung, die alle notwendigen Hard- und Software-Komponenten zur Generierung einer physikalisch unabhängigen Referenzposition umfasst und die Differenzen zwischen Referenztrajektorie, realer Trajektorie und Prüftrajektorie minimiert, heißt Referenzsystem.* \diamond

Die Definition schließt explizit den Aspekt der physikalischen Unabhängigkeit des zu prüfenden Ortungssystems und des Referenzsystems ein. Dies stellt eine notwendige Bedingung für eine Referenz dar, da sonst systematische Einflüsse auf die Messung nicht erkannt werden können. Messsysteme, die sich bei der Positionsmessung den gleichen physikalischen Effekt wie das zu prüfende Ortungssystem zu Nutze machen, können daher nicht als Referenz herangezogen werden.

2.2 Einführung in die Grundbegriffe der Metrologie

Die folgenden Erläuterungen zu den grundlegenden Begriffen der Metrologie stützen sich in konsistenter Weise auf die Begriffsdefinitionen des internationalen Wörterbuchs der Metrologie [20]. Dieses Wörterbuch dient den Metrologie-Instituten wie der deutschen Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) oder dem US-amerikanischen National Institute of Standards and Technology (NIST) als Referenz [129, S. 14]; so auch dieser Arbeit. Weitere Fachbegriffe sind von Bedeutung, obwohl sie nicht im Wörterbuch definiert sind. In diesen Fällen stützen sich die Erläuterungen auf die Normenreihe DIN 1319 [22, 27, 23, 24] sowie den Ausführungen in [2].

2.2.1 Begriffe des Messprozesses

Die Ressourcen des Messprozesses bilden eine *Messkette*, wie sie in allgemeiner Form in Abbildung 2.2 (nach [22, S. 31]) dargestellt ist [20, 3.10]. Der *Messaufnehmer* wandelt die physikalische Messgröße in ein elektrisches Signal, welches durch einen *Messumformer* je nach Bedarf umgewandelt wird [20, 3.8, 3.7]. Der Messaufnehmer und der Messumformer bilden ein *Messgerät* [20, 3.1]. Das digitale Messsignal wird von einem Mikrorechner weiterverarbeitet. Die Summe aller an der Messkette beteiligten Komponenten bilden ein *Messsystem* [20, 3.2]. Es erscheint an dieser Stelle sinnvoll, eine

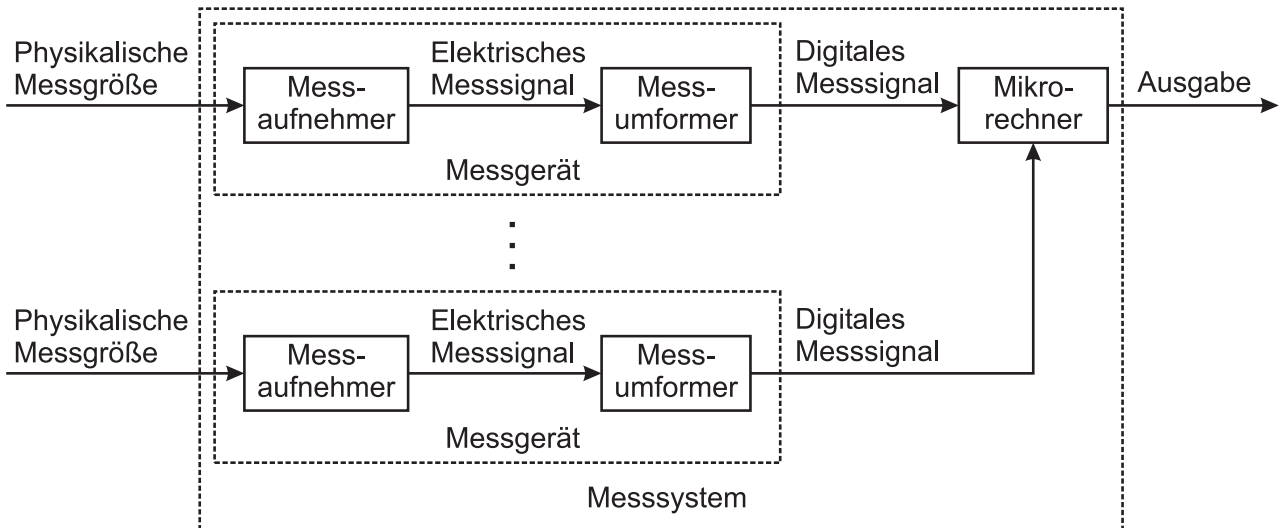


Abbildung 2.2: Typische Komponenten einer Messkette

Messung als *dynamische Messung* zu definieren, falls das Messsystem mindestens ein dynamisches Teilsystem im Sinne der mathematischen Systemtheorie enthält.

Im Allgemeinen ist eine *Messung* ein Prozess, bei dem ein oder mehrere *Größenwerte* experimentell ermittelt werden. Größenwerte werden bei der Messung mit Hilfe eines Messsystems [20, 2.1,1.19] erzeugt, wie Abbildung 2.3 nach [20] verdeutlicht. Jedes Messgerät des Messsystems verwendet ein bestimmtes *Messprinzip*, d. h. es nutzt einen physikalischen Effekt aus [20, 2.4]. Bei der Messung wird eine bestimmte *Messmethode* angewendet, welche die Art des Vorgehens bei der Messung charakterisiert [20, 2.5]. Das *Messverfahren* umfasst sämtliche Vorgänge und Tätigkeiten, die erforderlich sind, um das Messergebnis zu erhalten [20, 2.6]. Eine Messung findet unter *Messbedingungen* statt, die nur näherungsweise bekannt sind. Nach [2, S. 17] werden als Messbedingungen alle relevanten Begleitumstände bezeichnet, unter denen ein Messergebnis ermittelt wurde. Begleitumstände sind relevant, wenn sie das Ergebnis der Messung signifikant beeinflussen. Typische Messbedingungen sind der Zeitpunkt der Messung, der Ort der Messung oder die Umgebungsbedingungen (Temperatur, Druck, Feuchtigkeit). Die bei der Messung erzeugten Werte werden der betrachteten Größe – der *Messgröße* – zugewiesen und können auf ein *Normal* zurückgeführt werden [20, 2.3, 5.1]. Bei der Messgröße handelt es sich stets um eine physikalische Größe, die per Definition festgelegt wird.

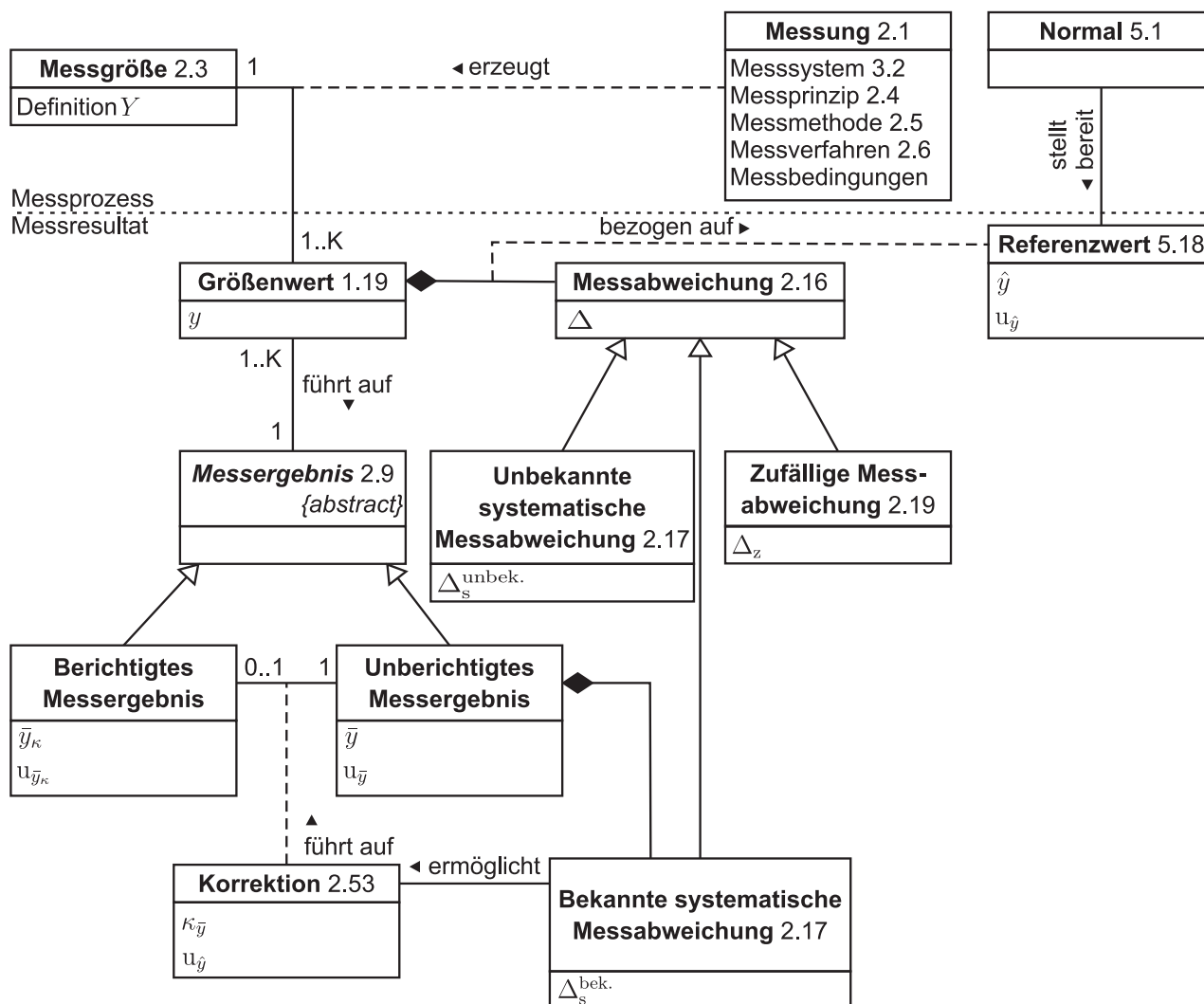


Abbildung 2.3: Relationen der wichtigsten Grundbegriffe

2.2.2 Begriffe des Messresultats

Die im Folgenden genannten Fachbegriffe zielen auf die Beschreibung des Messresultats bei der Messung einer zeitinvarianten Messgröße ab. Die Begriffe sind in der Literatur (z. B. [20]) wohldefiniert und allgemein anerkannt. Der dann folgende Abschnitt 2.3 zeigt auf, dass zur vollständigen Charakterisierung der Qualität von zeitabhängigen Messwerten weitere Begriffe zu definieren sind. Die Verallgemeinerung des Begriffs *Messqualität* für derartige Wertesequenzen wird hierbei durch eine strenge Hierarchisierung der bestehenden und zu ergänzenden Fachbegriffe erreicht.

Jeder Größenwert y ist mit einer *Messabweichung* Δ behaftet, womit im Allgemeinen die momentane Differenz zwischen einem Messwert und einem Bezugswert bezeichnet wird [20, 2.16]. Die Messabweichung lässt sich in eine *systematische Messabweichung* Δ_s und eine *zufällige Messabweichung* Δ_z unterteilen [20, 2.17, 2.19]. Der bekannte Anteil

$$\Delta_s^{\text{bek.}} = \bar{y} - \hat{y}$$

der systematischen Messabweichung ist auf einen *Referenzwert* \hat{y} bezogen, der von einem Normal bereitgestellt wird und aufgrund der Unvollkommenheit des Normals ebenfalls mit einer Unsicherheit angegeben wird [20, 5.18]. Der Anteil

$$\Delta_s^{\text{unbek.}} = \hat{y} - E\{Y\}$$

an der systematischen Messabweichung ist stets unbekannt, da der Erwartungswert $E\{Y\}$ der Messgröße unbestimmbar ist. Der bekannte und der unbekannte Anteil addieren sich zur gesamten systematischen Messabweichung

$$\Delta_s = \bar{y} - E\{Y\}.$$

Das *Messergebnis* besteht im Allgemeinen aus einem besten Schätzwert \bar{y} und einer Unsicherheitsangabe $u_{\bar{y}}$ die das Vertrauen in den besten Schätzwert quantifiziert [20, 2.9]. Das Messergebnis kann ein *unberichtigtes Messergebnis* \bar{y} sein, das die systematische Messabweichung Δ_s aufweist [22, 3.4.1]. Die bekannte systematische Messabweichung wird im Rahmen einer *Kalibrierung* festgestellt und ermöglicht eine *Korrektur* mit dem Wert

$$\kappa_{\bar{y}} = -(\bar{y} - \hat{y}),$$

welche auf ein *berichtigtes Messergebnis*

$$\bar{y}_{\kappa} = \bar{y} + \kappa_{\bar{y}}$$

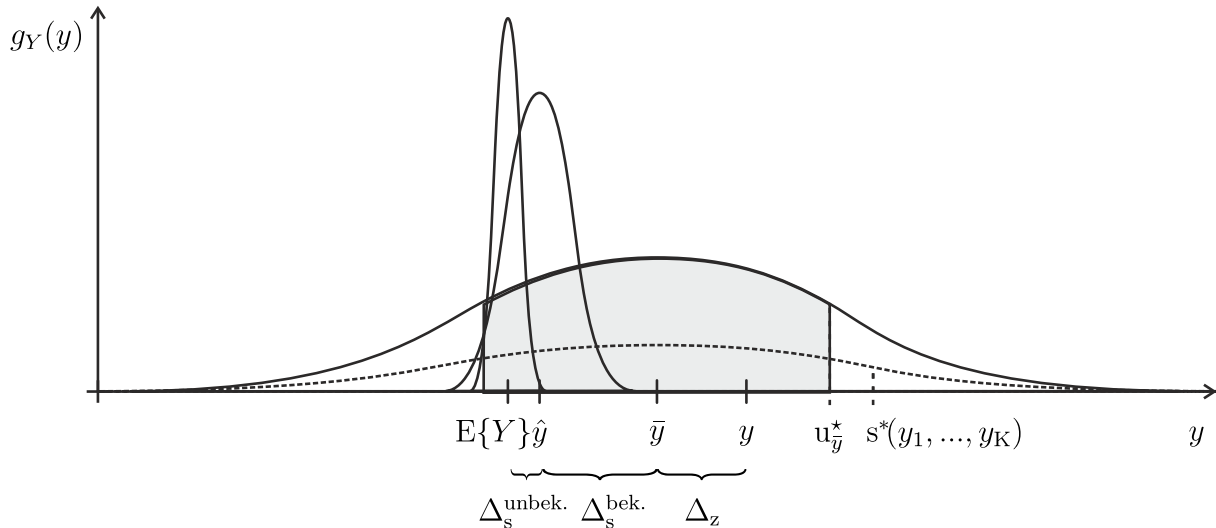


Abbildung 2.4: Abweichungen zwischen Größenwert, Referenzwert und Messwert

führt [20, 2.39, 2.53][22, entsprechend 3.4.2]. Die Kalibrierung ist ein Messprozess, dessen Messgröße die systematische Messabweichung ist, wobei nur der auf den vereinbarten Wert bezogene Anteil der Messabweichung gemessen werden kann.

Abbildung 2.4 ist eine zu der Abbildung 2.3 alternative Darstellung der Begriffe des unberechtigten Messergebnisses seiner Messabweichungen. Die durch die Messwerte mit der Streuung

$$s(y(1), \dots, y(K)) = s^*(y(1), \dots, y(K)) - \bar{y}$$

gebildete Häufigkeitsverteilung ist zur besseren Darstellung durch die gestrichelte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion visualisiert. Das vollständige Messergebnis weist die Unsicherheit

$$u_{\bar{y}} = u_{\bar{y}}^* - \bar{y}$$

auf. Die Messgröße ist aufgrund ihrer stets unvollständigen Definition als stochastische Größe aufzufassen und wird ebenfalls als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dargestellt, die durch den Erwartungswert $E\{Y\}$ und eine *Eigenunsicherheit* charakterisiert wird [20, 2.27].

2.3 Axiomatisierung der Messqualität

Der Begriff *Messqualität* ist in der Literatur und in den anerkannten Regeln der Technik nicht allgemeingültig definiert. Dies gilt insbesondere in Bezug auf die Messung von zeitvarianten Größen, die in der vorliegenden Arbeit im Fokus stehen. Dabei wird eine

Messgröße an dieser Stelle als *zeitvariant* definiert, wenn sich der Wert bzw. Wertebereich, der der Messgröße vernünftigerweise zugeordnet wird, prinzipiell im Laufe der Zeit ändern *kann*. Hieraus folgen zwangsläufig neue Aspekte, wie z. B. die Latenz von Messwerten, die bei der Beurteilung der Qualität von Messwerten berücksichtigt werden müssen. Es bietet sich daher an, eine Begriffsaxiomatisierung im Sinne des in [112] und [111] beschriebenen und in [131] standardisierten Schemas des Terminology-Engineering durchzuführen. Hiernach sind die Einflüsse auf die Messqualität nach Eigenschaften, Merkmalen und Größen sowie ihren Werten und Einheiten zu strukturieren. Dabei muss die Fragestellung beantwortet werden, wie von dem qualitativen Begriff der Messqualität auf quantifizierbare, d. h. messtechnisch erfassbare, Größen geschlossen werden kann.

Eine hierarchische Beschreibungsstruktur des Begriffs *Messqualität* zeigt Abbildung 2.5. Die Hierarchie ist dabei in die Ebenen *Begriff*, *Eigenschaften*, *Merkmale*, *Größen* sowie *Werte und Einheiten* gegliedert. Die Abbildung zeigt, dass sich der Qualitätsbegriff durch die Eigenschaften Messunsicherheit, Messgenauigkeit, Konsistenz, Latenz, Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit beschreiben lässt. Diese Eigenschaften ergeben sich zum einen direkt aus bekannten Zusammenhängen der Metrologie, wie es bei der Messunsicherheit oder der Messgenauigkeit der Fall ist [20]. Zum anderen sind die Eigenschaften aus den Fachgebieten der Informationsverarbeitung [114] sowie der technischen Zuverlässigkeit entlehnt [98] und wurden konzeptionell in das Schema der Begriffsbildung integriert, wie z. B. die Begriffe Konsistenz und Verfügbarkeit. Besonderes Augenmerk wird im Folgenden auf die Messunsicherheit und die Messgenauigkeit gelegt, die durch den Leitfaden [61] und die Normenreihe DIN ISO 5725 [31] eingeführt wurden. Diese Begriffe repräsentieren zwei alternative Betrachtungsweisen bzgl. der Charakterisierung der metrologischen Qualität einer Messung und werden an dieser Stelle in konsistenter Weise in das Begriffskonzept der Messqualität integriert, ohne dabei die etablierten Definitionen anzutasten.

2.3.1 Konzept der Messunsicherheit

Die *Messunsicherheit* ist definiert als „*nicht negativer Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die der Messgröße aufgrund der benutzten Information beigeordnet ist.*“ [20, 2.26]. Diese Definition ist „*[...] as clear as a foggy day.*“ [102]. Im Wörterbuch der Metrologie wird mühsam versucht, die Definition mit mehreren Fußnoten zu erläutern. Vereinfacht ausgedrückt bildet die Messunsicherheit den Zweifel am Messergebnis quantitativ ab [102]. Sie ist keine im Messprozess vorhandene physikalische Größe, die es möglichst gut zu bestimmen gilt [145]. Mittels der Messunsicherheit kann ein sogenanntes Überdeckungsintervall definiert werden, in welchem der Wert der Messgröße mit einem gewissen Grad an Vertrauen vermutet werden darf. Es wird nicht ausgesagt,

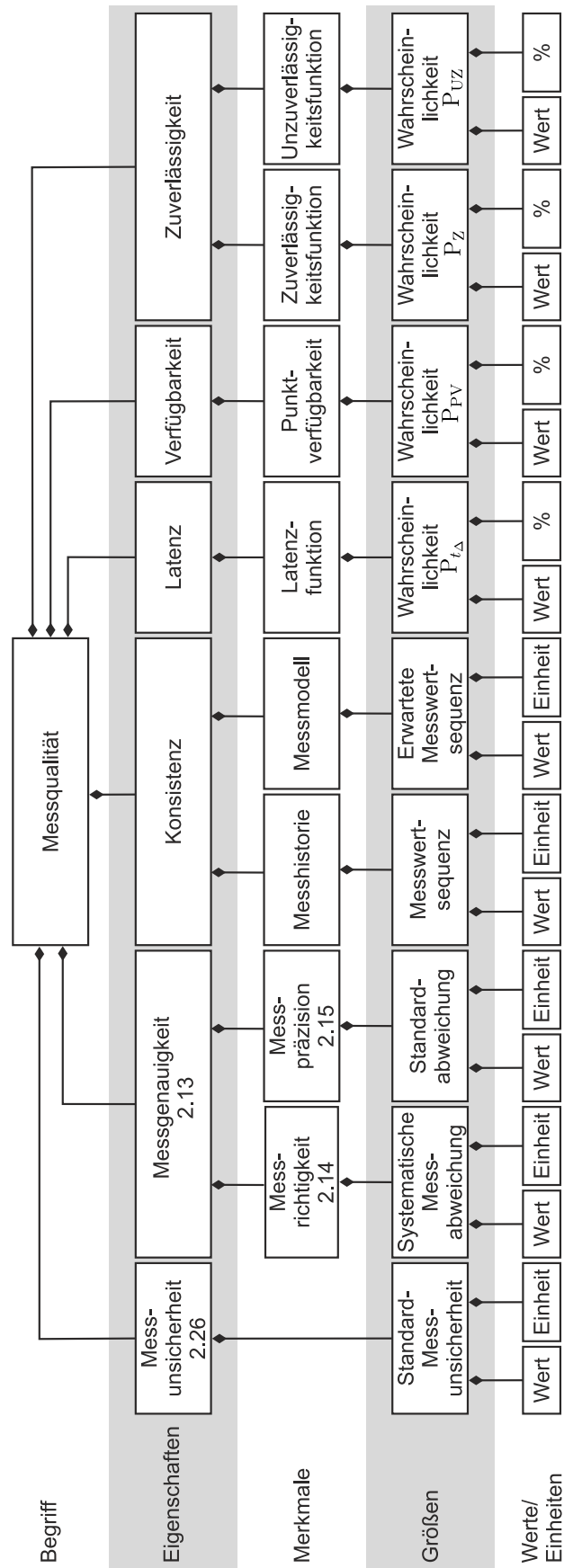


Abbildung 2.5: Konstituenten der Messqualität dargestellt in UML-Notation

dass der Wert der Messgröße garantiert in dem aus der Messunsicherheit abgeleiteten Intervall liegt [24, S. 18].

Nur durch die Angabe einer Messunsicherheit kann die für eine globale Wirtschaft und Wissenschaft notwendige Vergleichbarkeit von Messungen ermöglicht werden [146, S. 4], wie folgende Überlegung zeigt. Abbildung 2.6 ([102]) symbolisiert das Ergebnis einer Messung, das mit zwei unterschiedlichen Messverfahren bestimmt wurde. Das Messergebnis zweier Messungen ist aufgrund zufälliger Einflüsse typischerweise nicht identisch (Fall A). Die entscheidende Fragestellung ist jedoch, ob beide Messungen näherungsweise übereinstimmen oder ob eine signifikante Abweichung zwischen beiden Messergebnissen aufgetreten ist. Daher müssen den Messergebnissen Messunsicherheiten beigeordnet werden. Fall B zeigt, dass beide Messergebnisse sich innerhalb des jeweils anderen Überdeckungsintervalls befinden. Die erste Messung wurde damit durch die Zweite bestätigt. Im Fall C tritt jedoch eine signifikante Abweichung zwischen beiden Messergebnissen auf. In diesem Fall müssen die Gründe für die Abweichung untersucht werden. Möglicherweise trat eine Veränderung des Messgröße z. B. durch den Transport zu einem anderen Messlabor auf oder die Messbedingungen wichen entgegen der Annahme signifikant voneinander ab. Ein weiterer Grund könnten mangelnde Kenntnisse und Annahmen bei der Ermittlung der jeweils beigeordneten Messunsicherheiten sein. In diesem Fall müssten weitere Kenntnisse über den Messprozess erarbeitet und die Messunsicherheitsangabe entsprechend korrigiert werden.

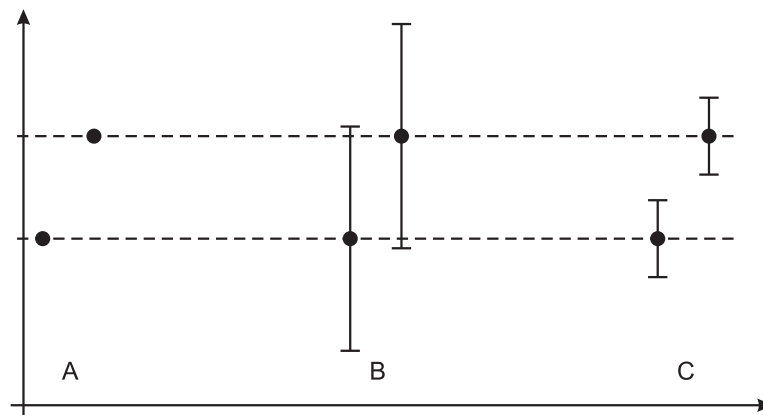


Abbildung 2.6: Vergleich von Messergebnissen mit Hilfe von Messunsicherheiten

Ein weiterer Grund für die Angabe einer Messunsicherheit ist die Konformitätsbewertung, bei der die Einhaltung gestellter Spezifikationen überprüft wird. Abbildung 2.7 ([102]) zeigt das Ergebnis verschiedener Messungen. Für sicherheitsrelevante Anwendungen dürfen nur Produkte verwendet werden, deren Intervall vollständig innerhalb der Spezifikation liegt (Fall A). Die Angabe einer Messunsicherheit verdeutlicht, dass

neben den offensichtlichen Fällen C und D auch im Fall B der Grenzwert der Spezifikation mit einer inakzeptabel hohen Wahrscheinlichkeit nicht eingehalten wird, obwohl das Messergebnis die Spezifikation erfüllt. Diese Überlegungen zeigen, dass eine Messung ohne die Angabe einer Messunsicherheit nicht zielführend ist.

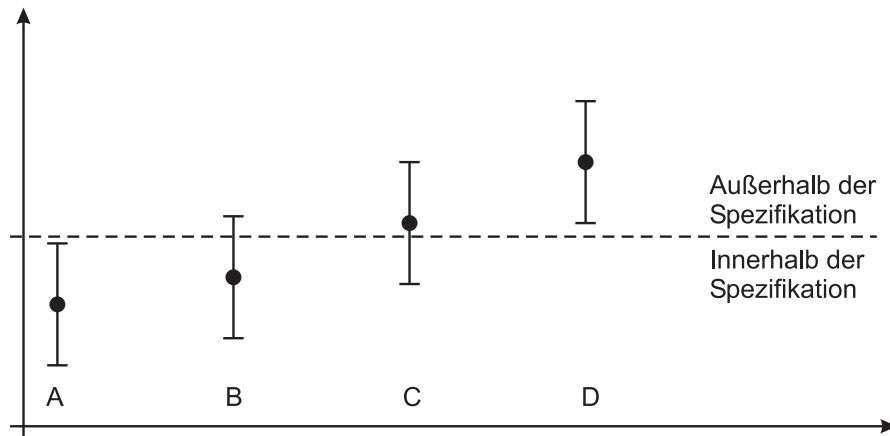


Abbildung 2.7: Konformitätsbewertung mit Hilfe von Messunsicherheiten

2.3.2 Konzept der Messgenauigkeit

Eine weitere Eigenschaft des Qualitätsbegriffs ist die *Messgenauigkeit*. Diese Eigenschaft stützt sich auf die Häufigkeitsstatistik. Die Messgenauigkeit charakterisiert die Annäherung des Messergebnisses an den als wahr angenommen Wert der Messgröße. Die Messgenauigkeit ist ein qualitatives Maß und setzt sich aus den qualitativen Merkmalen *Messrichtigkeit* und *Messpräzision* zusammen [20, 2.13]. Sie darf in keinem Fall direkt mit einem Wert (z. B. Genauigkeit = 5 cm) in Verbindung gebracht werden [129, S. 14]. Eine Bewertung der Messgenauigkeit anhand von quantitativen Größen, wie dem empirischen Mittelwert oder der empirischen Standardabweichung, befindet sich jedoch im Einklang mit der offiziellen Definition. Je nach den Anforderungen des betrachteten Anwendungsfalls wird anhand dieser quantitativen Größen auf eine *hohe* oder *niedrige* Genauigkeit geschlossen.

Die Messrichtigkeit einer Stichprobenmessung wird durch die bekannte systematische Messabweichung quantifiziert [20, 2.14] [31, S. 10]. Hierbei wird ein Normal verwendet, das einen Referenzwert bereitstellt. Je näher die systematische Abweichung am Wert null liegt, desto höher ist die Messrichtigkeit. Das qualitative Merkmal Messpräzision wird durch die empirische Standardabweichung der Stichprobe quantitativ beschrieben

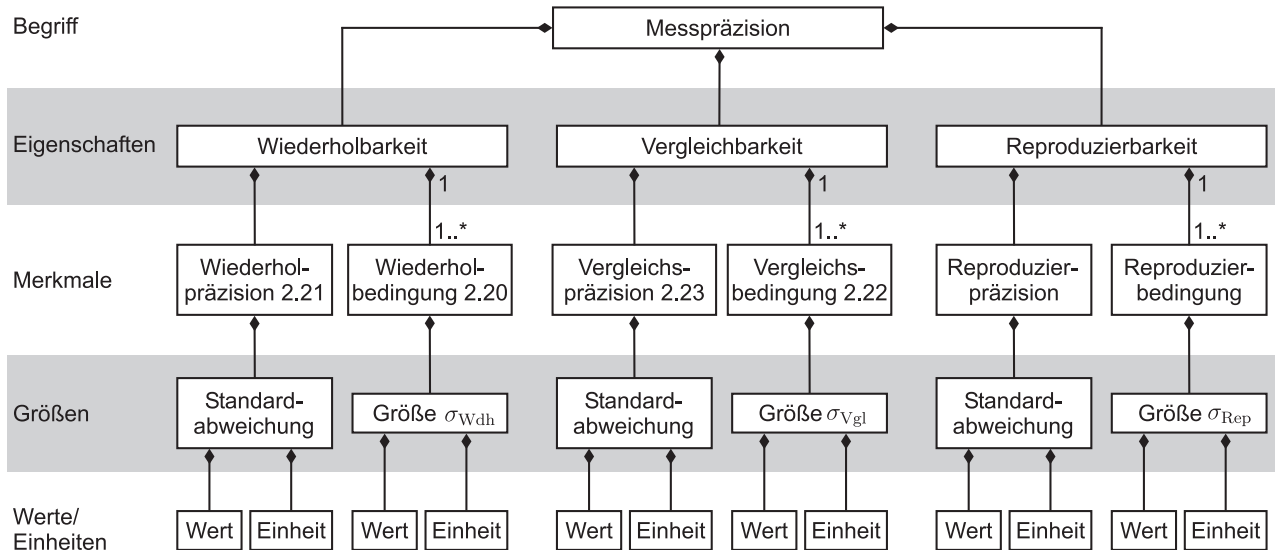


Abbildung 2.8: Konstituenten der Messpräzision

[20, 2.15][31, S. 8]. Je näher die empirische Standardabweichung am Wert null liegt, desto höher ist die Messpräzision.

Zur Bestätigung von Größenwerten ist es sinnvoll, Messungen zu wiederholen. Hierbei muss laut [2, S. 42] zwischen den Begriffen *Wiederholbarkeit*, *Reproduzierbarkeit* und *Vergleichbarkeit* unterschieden werden. Alle drei Begriffe bezeichnen qualitative Ausprägungen der Präzision, die durch ein Streumaß quantifiziert werden können. In [31] und [18] wird nur die Wiederholbarkeit und die Vergleichbarkeit betrachtet, wobei für letzteres in den englischen Textfassungen unglücklicherweise der Ausdruck *reproducibility* verwendet wird. In der deutschen Übersetzung wird korrekterweise der Begriff *Vergleichbarkeit* verwendet [31, S. 24]. Abbildung 2.8 zeigt, wie die fünf Ebenen des Begriffsschemas rekursiv verwendet werden können. Das Merkmal *Messpräzision* aus Abbildung 2.5 stellt hier selbst einen Begriff dar, der wiederum aus Eigenschaften, Merkmalen und Größen sowie deren Werten und Einheiten konstituiert wird.

Die Wiederholbarkeit kann angegeben werden, wenn dasselbe Messverfahren, derselbe Bediener, dieselbe Messeinrichtung, derselbe Messort und weitere Messbedingungen bei den durchgeführten Messungen näherungsweise identisch sind. Ein Beispiel hierfür ist die Messung einer elektrischen Spannung mit einem Voltmeter, die mehrfach direkt hintereinander ausgeführt wird. Wiederholmessungen geben nur Aufschluss über das Ausmaß zufälliger Effekte und liefern keinen Hinweis auf die systematischen Einflüsse [102]. Im Bezug auf eine Menge von wiederholten Messungen werden die vorliegenden Messbedingungen auch *Wiederholbedingungen* genannt [20, 2.20]. Bei der Reproduzierbarkeit hingegen wird die Streuung der ermittelten Größenwerte bei veränderten Messbedingungen, beispielsweise bei veränderter Raumtemperatur, angegeben. Wird bei

mehreren Messungen derselben Messgröße das gleiche Messverfahren angewendet, wie es bei Ringversuchen zwischen mehreren Laboratorien üblich ist, wird das Ausmaß der Ergebnisübereinstimmung nicht Reproduzierbarkeit, sondern Vergleichbarkeit genannt [2, S. 42]. Diese drei – durchaus gebräuchlichen – Begriffe sind in [20] nicht definiert. Stattdessen werden dort lediglich die Begriffe *Wiederholbedingung von Messungen* und entsprechend dazu *Vergleichsbedingung* definiert.

Die Eigenschaft Wiederholbarkeit besteht aus den Merkmalen *Wiederholpräzision* und *Wiederholbedingungen*. Mit der Wiederholbarkeit lässt sich eine Aussage darüber treffen, in welchem Maße das Messsystem unter konstanten Messbedingungen das gleiche Messergebnis liefert. In diesem Fall wird die Messpräzision einer Messung der Größe Y allein durch die Wiederholpräzision beschrieben, welche durch die Standardabweichung $\sigma_{\text{Wdh}}\{Y\}$ quantifiziert wird. Dabei werden unter den Wiederholbedingungen die für die Messung relevanten Messbedingungen aufgefasst. Es gilt das Messmodell

$$Y = \mu + W$$

$$\sigma\{Y\} = \sigma_{\text{Wdh}}\{Y\},$$

wobei μ den Erwartungswert der Messgröße und W eine mittelwertfreie und normalverteilte Zufallsgröße darstellt, deren Standardabweichung $\sigma_{\text{Wdh}}\{Y\}$ die zufälligen Einflüsse auf die Messung unter Wiederholbedingungen widerspiegelt.

Sobald nicht nur eine einzelne Messreihe, sondern die Veränderungen der Messergebnisse aufgrund variabler Messbedingungen betrachtet werden sollen, muss die Messpräzision um die Vergleichspräzision erweitert werden. Die Vergleichspräzision wird durch die Standardabweichung $\sigma_{\text{Vgl}}\{Y\}$ quantifiziert und beschreibt die zusätzliche Streuung des Messergebnisses durch die Vergleichsbedingungen. Die Vergleichsbedingungen umfassen alle Messbedingungen, die sich von Messung zu Messung verändern. Die Vergleichspräzision ist durch die von den Vergleichsbedingungen verursachten Einflüsse geringer als die Präzision bei einer Messung unter gleichen (Wiederhol-)Messbedingungen [31, S. 8]. Bei variablen Messbedingungen gilt das Messmodell

$$Y = \mu + W + V$$

$$\sigma\{Y\} = \sqrt{\sigma_{\text{Wdh}}^2\{Y\} + \sigma_{\text{Vgl}}^2\{Y\}}.$$

Hierbei ist V ein additiver Anteil durch die veränderten Messbedingungen, der sowohl eine systematische Komponente als auch die zufällige Komponente $\sigma_{\text{Vgl}}\{Y\}$ enthält.

Analog zur Vergleichbarkeit kann die Reproduzierbarkeit definiert werden, die durch $\sigma_{\text{Rep}}\{Y\}$ quantifiziert wird. Die Reproduzierbedingungen umfassen die zusätzliche Streuung der Messergebnisse aufgrund eines anderen Messverfahrens. Wenn die Standardabweichung der mit unterschiedlichen Messverfahren ermittelten Messergebnisse gegen

null strebt, so kann dem einzelnen Messergebnis eine hohe Reproduzierbarkeit zugesprochen werden. Bei vorliegenden Reproduzierbedingungen gilt

$$Y = \mu + W + V + R$$

$$\sigma\{Y\} = \sqrt{\sigma_{\text{Wdh}}^2\{Y\} + \sigma_{\text{Vgl}}^2\{Y\} + \sigma_{\text{Rep}}^2\{Y\}}.$$

Die Zufallsgröße R repräsentiert den durch das alternative Messverfahren hervorgerufenen systematischen Einfluss sowie den zufälligen Anteil $\sigma_{\text{Rep}}\{Y\}$. Da die Einflüsse von gleichzeitig wirkenden Vergleichs- und Repoduzierbedingungen nicht separat betrachtet werden können, kann nur die gemeinsame Wirkung $\sigma_{\text{Vgl}}^2\{Y\} + \sigma_{\text{Rep}}^2\{Y\}$ durch andere Messbedingungen und alternative Messverfahren auf die Messpräzision bestimmt werden.

2.3.3 Gegenüberstellung der Konzepte *Messunsicherheit* und *Messgenauigkeit*

Die Konzepte der Messgenauigkeit [31] und der Messunsicherheit [61] stellen zwei unterschiedliche Sichtweisen bzgl. der Bewertung von Messergebnissen dar.

Die **Messunsicherheit** beschreibt die Qualität eines Messergebnisses in einer allgemeingültigen Form, da bei ihrer Beurteilung sämtliche denkbare Einflüsse auf das Messergebnis abgeschätzt werden. Die Beurteilung der Einflüsse erfolgt dabei neben Stichprobenmessungen auch – oder sogar ausschließlich – mittels a priori-Kenntnissen über den Messprozess. Hierdurch wird die Beurteilung des metrologischen Anteils an der Messqualität auf eine stochastische Basis gestellt. Nach der Korrektur der bekannten systematischen Messabweichung verbleiben die unbekannte systematische Messabweichung und die zufällige Messabweichung. Beide stellen eine Form der Unkenntnis über den Messprozess dar und werden beim Konzept der Messunsicherheit einheitlich behandelt. Die Messunsicherheit ist ein Maß für die Menge an Wissen über die Messgröße im Sinne des Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs und muss sorgfältig von der Messgenauigkeit unterschieden werden, welche mit Hilfe statistischer Methoden ermittelt wird [145].

Die qualitative **Messgenauigkeit** kann für eine konkrete Stichprobenmessung quantifiziert werden, bei der die Messgröße mehrfach unter näherungsweise konstanten Bedingungen gemessen wird. Im Gegensatz zur Messunsicherheitsbeurteilung wird für die Angabe der Messgenauigkeit ein Referenzwert benötigt, auf den alle Messwerte bezogen werden können. Die Größenwerte zur quantitativen Charakterisierung der Messpräzision und der Messrichtigkeit lassen sich aus den Messwerten direkt mit Hilfe der deskriptiven Statistik berechnen. Hierbei wird der unbekannte Anteil der systematischen

Messabweichung (vgl. Abbildung 2.4) negiert, wodurch das Ausmaß der systematischen Messabweichung unterschätzt wird. Das Wissen über die Messabweichung kann somit nicht über das Wissen über die Bezugsgröße hinausgehen. Daher wird in [146, S. 20] die Bewertung der Messabweichung als Umweg betrachtet und stattdessen die direkte Darlegung der Kenntnisse über die Messgröße gefordert, wie es beim Konzept der Messunsicherheit der Fall ist. A priori-Kenntnisse über den Messprozess, wie z. B. der Einfluss der schwankenden Raumtemperatur auf das Messergebnis, spielen bei der Angabe der Messgenauigkeit keine Rolle. Die Aussage über die Messgenauigkeit ist stets nur für die durchgeführte Stichprobe und die dabei vorliegenden Messbedingungen gültig. Da für Zusatzwissen über die Stichprobe hinaus keine statistisch auswertbaren Werte vorliegen, bleibt dieses Wissen bei Genauigkeitsangaben stets unberücksichtigt [146, S. 3]. Dennoch ist die Ermittlung der Messgenauigkeit durch eine statistische Auswertung von Messwerten sinnvoll, um sich Kenntnisse über die Messung zu erarbeiten und Einflussfaktoren auf das Messergebnis zu identifizieren. Erst hierdurch wird eine Modellierung der Messung und deren experimentelle Verifizierung möglich.

2.3.4 Weitere Eigenschaften der Messqualität

Die Messqualität und die Messgenauigkeit stellen die bislang etablierten Eigenschaften zur Charakterisierung der Messqualität dar. Dies ist hinreichend, falls eine konstante Größe gemessen wird, da hierbei beliebig viel Zeit zur Durchführung der Messung, der Ermittlung der vorliegenden Messbedingungen und der sorgfältigen Messunsicherheitsbeurteilung zur Verfügung steht. Dies ändert sich, falls eine zeitvariante Größe unter stetig variierenden Bedingungen gemessen wird. Über die Qualität der Messwerterfassung hinaus drängen sich die Fragen auf, ob die gemessenen Werte für eine nachgelagerte Funktion *brauchbar sind*, *schnell genug* bereitgestellt werden können und *wie lange* die Bereitstellung der Werte mit der festgestellten Genauigkeit aufrechterhalten werden kann. Aus diesem Grund müssen die weiteren Aspekte Konsistenz, Latenz, Verfügbarkeit und verschiedene Ausprägungen der Zuverlässigkeit von Messwerten in das Begriffsgebäude eingearbeitet werden. Diese sind daher ebenfalls Bestandteil von Abbildung 2.5.

Konsistenz von Messwerten. Im Allgemeinen spielt bei der Bewertung von Informationen die Integrität der erfassten Daten eine wichtige Rolle. Der Begriff *Integrität* ist dem Fachgebiet der Informationsverarbeitung entlehnt. Integrität von Daten ist nach [114, S. 113] gegeben, wenn die Daten vollständig, korrekt und konsistent sind. Messwerte und Kenntnisse über den Messprozess können jedoch prinzipiell nicht vollständig sein. Des Weiteren sind Messwerte nie korrekt, sondern stets mit Unsicherheiten behaftet. Dies wird im Begriffsmodell bereits durch die Messunsicherheit bzw. Messge-

nauigkeit abgedeckt. Somit reduziert sich der Aspekt der Integrität auf die *Konsistenz* der Messwerte. Hierdurch wird der Verwechslung der Konsistenz-*Eigenschaft* mit dem aus der Luft- und Raumfahrt bekannten Integritätsbegriff vorgebeugt, welcher sich auf das Vorhandensein einer System-*Funktion* zur Prüfung der Integrität bezieht. Die Konsistenz beschreibt die Widerspruchsfreiheit der Messwerte. Die Eigenschaft Konsistenz wird durch die Merkmale *Messhistorie* und *Messmodell* charakterisiert. Aus der Modellvorstellung von der Messung lässt sich eine Erwartung an zukünftige Messwerte ableiten, die mit dem Verlauf der gemessenen Werte verglichen werden, um so die Konsistenz der Messreihe zu bewerten. Diese Sichtweise befindet sich im Einklang mit den Ausführungen in [149, S. 82-83], in denen die Konsistenz bzgl. Informationen allgemeiner Art betrachtet wird. Bei der Konsistenz handelt es sich um eine binäre Eigenschaft. Sobald widersprüchliche Messwerte entdeckt werden, d. h. Werte die sich nicht im Einklang mit der Modellvorstellung befinden, ist die Konsistenz nicht mehr gegeben und die Messreihe muss verworfen werden.

Latenz von Messwerten. Im Gegensatz zu zeitunabhängigen Messungen muss ein vollständiges Messergebnis eine Angabe darüber umfassen, zu welchem Zeitpunkt das Messergebnis gültig ist. Folglich ist die Qualität der Zeitangabe Teil der Qualität der Messung. Aufgrund der Kausalität jedes Messgeräts können aktuelle Werte nicht zukünftigen Zeitpunkten zugeordnet werden. Die Latenz-Eigenschaft repräsentiert somit die Verzögerung der Messwerte. Die Zeitverzögerung zwischen dem Zeitpunkt, zu dem ein Wert gemessen wird, und dem Moment, zu dem ein Zugriff darauf möglich ist, stellt einen Unsicherheitsbeitrag zur gesamten Messunsicherheit dar. Diese Unsicherheit ist unabhängig vom eigentlichen Messprinzip und wird maßgeblich durch die Datenverarbeitung und Kommunikation innerhalb des Messsystems hervorgerufen. Dieser Unsicherheitsbeitrag ist durch die Klasse der zeitabhängigen Messgrößen bedingt und hier strukturell unvermeidbar. Die Latenz kann in gleicher Weise als systematischer Genauigkeitsverlust angesehen werden, da die Verzögerung zu einem systematischen Verlust an Genauigkeit führt. Die Latenz wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion charakterisiert. Hieraus lässt sich eine Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass ein für die betrachtete Anwendung kritischer Wert für die Latenzzeit nicht überschritten wird.

Verfügbarkeit von Messwerten. Für den Begriff *Verfügbarkeit* existieren zahlreiche Definitionen, wie in [98, S. 197-200] aufgezeigt wird. Den Definitionen ist gemein, dass die Verfügbarkeit eine Wahrscheinlichkeit bzgl. der Funktionstüchtigkeit eines Systems zu einem Zeitpunkt bzw. über ein Zeitintervall darstellt. Im Hinblick auf Beurteilung der Qualität von Messwerten wird an dieser Stelle die Verfügbarkeits-Eigenschaft in Anlehnung an [86] bzw. [58] in Bezug auf einen konkreten Zeitpunkt definiert und durch

das Merkmal *Punktverfügbarkeit* konkretisiert. Die Punktverfügbarkeit kennzeichnet die Häufigkeit von als verfügbar betrachteten Messwerten.

Zuverlässigkeit von Messwerten. Im Gegensatz zur punktweisen Messwertbetrachtung bei der Verfügbarkeits-Eigenschaft, bezieht sich die Eigenschaft *Zuverlässigkeit* auf eine Sequenz von Messwerten und somit auf eine Zeitspanne. Die Zuverlässigkeit wird im Allgemeinen durch eine Überlebenswahrscheinlichkeit quantifiziert, wobei unter dem Begriff *Überleben* die Aufrechterhaltung der spezifizierten Funktion über eben jene Zeitspanne verstanden wird [98, S. 222-223]. In Bezug auf die hier betrachteten Messwertsequenzen besteht die Funktion der Messwerte daraus, verfügbar zu sein. Die Zuverlässigkeit drückt somit die Kontinuität der Verfügbarkeit bzw. Unverfügbarkeit aus, weshalb hierfür im Fachgebiet der Luft- und Raumfahrttechnik der Ausdruck *continuity performance* bzw. *continuity risk* gebraucht wird [36]. Die Zuverlässigkeit wird hier durch die *Zuverlässigkeitsfunktion* und die *Unzuverlässigkeitsfunktion* charakterisiert. Die Zuverlässigkeitsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeiten für das Überleben der Messwerte bzw. den Verleib der Werte im Zustand „*verfügbar*“ über die geforderte Dauer hinaus. Komplementär dazu, charakterisiert die Unzuverlässigkeitsfunktion das Überleben von als unverfügbar betrachteten Werten. Aussagen über Zuverlässigkeit bedingen, dass ein konkreter Anwendungsfall feststeht, welcher den Beginn und das Ende der zu betrachtenden Messwertsequenz definiert.

Die Bestimmung der in diesem Abschnitt beschriebenen Eigenschaften und Merkmale erlaubt es, qualitative Aussagen über die jeweiligen Qualitätseigenschaften der Messwerte zu treffen. Die Messunsicherheit wird hierbei auf Basis der vorliegenden und zu modellierenden Kenntnisse über den Messprozess festgelegt. Die Quantifizierung der weiteren Qualitätseigenschaften erfordert die statistische Auswertung von Messreihen anhand der im nächsten Abschnitt definierten Qualitätsmaße.

2.4 Quantifizierung der Messqualität

Bei der Quantifizierung der Messqualität gilt es die Frage zu beantworten, nach welcher Rechenvorschrift die jeweiligen Werte der in Abschnitt 2.3 genannten und in den Abbildungen 2.5 und 2.8 gezeigten Größen zu bestimmen sind. Für die etablierten Konzepte Messunsicherheit und Messgenauigkeit existieren bereits Verfahren bzw. Rechenvorschriften. Aufgrund der Komplexität der Messunsicherheitsbeurteilung wird an dieser Stelle auf die ausführlichen Erläuterungen in den Kapiteln 3 und 4 verwiesen. Für die Bestimmung der Messgenauigkeit finden sich in der Literatur einfache Rechen-

vorschriften für die Messung zeitinvarianter Größen, die im Folgenden als Vorbild für die Erweiterung auf zeitvarianter Größen dienen.

Bei der Messung zeitinvarianter Größen wird die Messrichtigkeit einer Stichprobenmessung mit dem Umfang K durch die bekannte systematische Messabweichung,

$$\Delta_s^{\text{bek.}}(y(1), \dots, y(K)) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (y(k) - \hat{y}) \quad (2.1)$$

quantifiziert [20, 2.14] [31, S. 1]. Das qualitative Merkmal Messpräzision wird durch die empirische Standardabweichung der Stichprobe

$$s(y(1), \dots, y(K)) = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (y(k) - \hat{y})^2} \quad (2.2)$$

quantitativ beschrieben [20, 2.15][31, S. 2]. Die Wiederholpräzision

$$\sigma_{\text{Wdh}}\{Y\} \approx s(y(1), \dots, y(K)) \quad (2.3)$$

wird mit der empirischen Standardabweichung von K Stichprobenmessungen geschätzt. Die Vergleichspräzision beschreibt die Veränderungen der Messergebnisse aus H vielen Messreihen. Ihr Beitrag

$$\sigma_{\text{Vgl}}\{Y\} \approx s(\bar{y}(1), \dots, \bar{y}(H))$$

wird mit Hilfe der empirischen Standardabweichung der Messergebnisse abgeschätzt. Hinsichtlich der Reproduzierpräzision kann nur die gemeinsame Wirkung $\sigma_{\text{Vgl}}^2\{Y\} + \sigma_{\text{Rep}}^2\{Y\}$ durch andere Messbedingungen und alternative Messverfahren auf die Messpräzision mittels $s^2(\bar{y}(1), \dots, \bar{y}(H))$ abgeschätzt werden.

Die zuvor genannten Quantifizierungen der Genauigkeitsmerkmale können nicht unverändert auf die Betrachtung zeitvarianter Messgrößen übertragen werden. Bei zeitvarianten Messgrößen ist es nicht möglich, die Streuung von unter Wiederholbedingungen aufgenommenen Messwerten zu bestimmen, da nicht zwischen den zufälligen Einflüssen auf den Messprozess und den tatsächlichen Werteänderungen der Messgröße unterschieden werden kann [53, S. 245]. Daher muss die Quantifizierung der auf die Genauigkeit bezogenen Merkmale bei zeitvarianten Messgrößen neu definiert werden. Ebenso sind die Quantifizierungen der weiteren Qualitätseigenschaften bzw. -Merkmale zu ergänzen.

Messgenauigkeit

Die Messrichtigkeit einer Stichprobenmessung einer zeitvarianten Messgröße lässt sich durch die mittlere Messabweichung

$$\Delta_s^{\text{bek.}}(y(1), \dots, y(K)) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (y(k) - \hat{y}(k))$$

quantifizieren. Im Unterschied zu Gleichung (2.1) wird hierbei berücksichtigt, dass im zeitvarianten Fall der Referenzwert $\hat{y}(k)$ ebenfalls zeitvariant ist. Die Quantifizierung der Messrichtigkeit bei zeitvarianten Messgrößen stellt somit eine Verallgemeinerung des zeitinvarianten Falls dar.

Im Gegensatz zur Betrachtung zeitinvarianter Größen muss für die Quantifizierung der Messpräzision bei zeitvarianten Größen – analog zur Messrichtigkeit – ein Referenzwert bereitgestellt werden. Die Wiederholpräzision wird durch

$$\sigma_{\text{Wdh}}\{Y\} \approx s((y(1) - \hat{y}(1)), \dots, (y(K) - \hat{y}(K))) \quad (2.4)$$

geschätzt. Unter der Annahme, der Wert der Messgröße bzw. Referenzgröße sei konstant ($\hat{y}(k) \equiv \hat{y}$), geht Gleichung (2.4) in Gleichung (2.3) über, da der Zusammenhang

$$s(y(1) - \hat{y}(1)), \dots, (y(K) - \hat{y}(K)) = s((y(1) - \hat{y}), \dots, (y(K) - \hat{y})) = s(y(1), \dots, y(K))$$

gilt. Somit stellt die Wiederholpräzision bei einer zeitinvarianten Messgröße einen Spezialfall der Wiederholpräzision bei einer zeitvarianten Messgröße dar. Analog dazu wird bei zeitvarianten Messgrößen vernünftigerweise die Vergleichspräzision $\sigma_{\text{Vgl}}\{Y\}$ bzw. die Reproduzierpräzision $\sigma_{\text{Rep}}\{Y\}$ durch die Streuung $s(\Delta_s^{\text{bek.}}(1), \dots, \Delta_s^{\text{bek.}}(H))$ quantifiziert, wobei

$$\Delta_s^{\text{bek.}}(h) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (y_h(k) - \hat{y}_h(k)), \quad h = 1, \dots, H$$

die mittlere bekannte Messabweichung der h -ten Messreihe vom Umfang K ist.

Konsistenz

Die Messhistorie besteht aus dem Verlauf der Referenzmesswerte $\hat{y}(1), \dots, \hat{y}(K)$ über den Messzeitraum, in dem K viele Messungen durchgeführt wurden. Hieraus lässt sich mit dem Wissen über die mittlere Messabweichung bisher gemessener Werte $\hat{y}(1), \dots, \hat{y}(k-1)$ eine Erwartung an den jeweils nächsten Messwert $y(k)$ in Form eines sinnvollen Wertebereichs ableiten. Dies stellt die Modellvorstellung der zu prüfenden Messwerte dar. Es bietet sich an, einen Messwert als inkonsistent zu betrachten, wenn seine Messabwei-

chung einen physikalisch sinnvollen Grenzwert übersteigt, und diesen Grenzwert an die mittlere Messabweichung zu koppeln. Daher wird der aus der Metrologie bekannte *maximum permissible error* (MPE) [20, 4.26] an dieser Stelle hinsichtlich der Konsistenz als

$$\text{MPE}_K := \zeta \cdot \Delta_s^{\text{bek.}}$$

definiert, wobei das Vielfache ζ je nach Anwendungsfall zu wählen ist. Eine notwendige Bedingung für die Konsistenz einer Messreihe ist die Konsistenzbedingung

$$\forall y(k) : |y(k) - \hat{y}(k)| \leq \text{MPE}_K.$$

Alternativ hierzu kann die Konsistenz anhand einer Kreuzkorrelationsfunktion analysiert werden. Ihr Funktionswert stellt ein Maß für die Übereinstimmung der anhand des Modells erwarteten und der tatsächlich gemessenen Werte dar. Darüber hinaus ist die Konsistenz mittels Expertenwissens durch den Messtechniker zu beurteilen.

Latenz

Die Latenz bezeichnet den zeitlichen Versatz zwischen dem Zeitpunkt $t_{\text{Messung}}(k)$, zu dem die Messung erfolgt und dem Zeitpunkt $t_{\text{Zugriff}}(k)$, zu dem erstmalig Zugriff auf den Messwert möglich ist. Die Latenzzeit eines Messwerts wird daher durch

$$t_{\Delta}(k) := t_{\text{Zugriff}}(k) - t_{\text{Messung}}(k)$$

definiert. Zur Quantifizierung der Latenz werden die festgestellten Latenzzeiten in einem Histogramm aufgetragen und durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion – der Latenzfunktion – approximiert. Anhand der Latenzfunktion wird anschließend die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Latenzzeit eines Messwerts einen spezifizierten Grenzwert nicht überschreitet. Im Falle einer näherungsweise konstanten Latenzzeit wird die Latenz häufig vereinfacht durch die mittlere Latenzzeit anstelle einer Wahrscheinlichkeit quantifiziert.

Verfügbarkeit

Bei der Quantifizierung der Verfügbarkeit ist zwischen *möglichen Werten*, *vorhandenen Werten* und *verfügbaren Werten* zu unterscheiden. Die Anzahl der möglichen Werte K ergibt sich unmittelbar aus der Länge des Messzeitraums und der Messrate. Falls zu einem festen Messzeitpunkt *genau ein* Wert vorliegt, gilt dieser als vorhanden. Die Eigenschaften Genauigkeit und Latenz werden anhand der vorhandenen Werte quan-

tifiziert, die Verfügbarkeit hingegen anhand der verfügbaren Werte. Ein Wert heißt *verfügbar*, wenn er konsistent ist und – analog zur Konsistenz – seine Messabweichung einen bestimmten Grenzwert nicht überschreitet, d. h. die Bedingung

$$|y(k) - \hat{y}(k)| \leq \text{MPE}_V, \quad \text{mit } \text{MPE}_V := \eta \cdot \Delta_s^{\text{bek.}}$$

erfüllt ist. Die Verfügbarkeit ist somit an eine Genauigkeitsforderung gekoppelt, falls $\text{MPE}_V \leq \infty$ gilt. Wird $\text{MPE}_V := \infty$ gewählt, gelten alle vorhandenen Werte als verfügbar. Die Anzahl der verfügbaren Werte innerhalb eines Messzeitraums wird im Folgenden mit k_V bezeichnet.

Die Punktverfügbarkeit wird durch die Wahrscheinlichkeit

$$P_{PV} = \frac{k_V}{K}$$

dafür gekennzeichnet, dass bei Betrachtung eines beliebigen Zeitpunkts innerhalb des Messzeitraums genau ein Messwert verfügbar ist. Es gilt zwangsläufig $k_V \leq K$.

Zuverlässigkeit

Die Zuverlässigkeitsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine mit einem verfügbaren Messwert beginnende Wertesequenz der geforderten Länge Ξ_V ausschließlich aus verfügbaren Messwerten besteht. Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit werden die einzelnen Längen ξ_V der ununterbrochen verfügbaren Wertefolgen einer Messreihe in einem Histogramm aufgetragen. Anschließend wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion als Zuverlässigkeitsfunktion bestimmt, die dieses Histogramm bestmöglich approximiert, wie Abbildung 2.9 am Beispiel der Lognormal-Verteilung zeigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Vorliegen eines verfügbaren Messwerts mindestens auch die nächsten $\Xi_V - 1$ Werte verfügbar sind, ist

$$P_{Z, \Xi_V} = \text{Prob}(\xi_V \geq \Xi_V) = 1 - \text{Prob}(\xi_V < \Xi_V).$$

Eine hohe Wahrscheinlichkeit deutet auf eine hohe Zuverlässigkeit hin. Alternativ zur Betrachtung der Anzahl von verfügbaren Werten kann die Zuverlässigkeit auch über die Zeit definiert werden, da eine Anzahl von Messwerten unmittelbar über die Messrate in eine entsprechende Zeit umgerechnet werden kann.

Analog zur Zuverlässigkeitsfunktion wird für die Bestimmung der Unzuverlässigkeitsfunktion ein Histogramm der Längen ξ_{UV} der ununterbrochen unverfügbaren Wertefolgen erstellt und ebenfalls durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion approximiert.

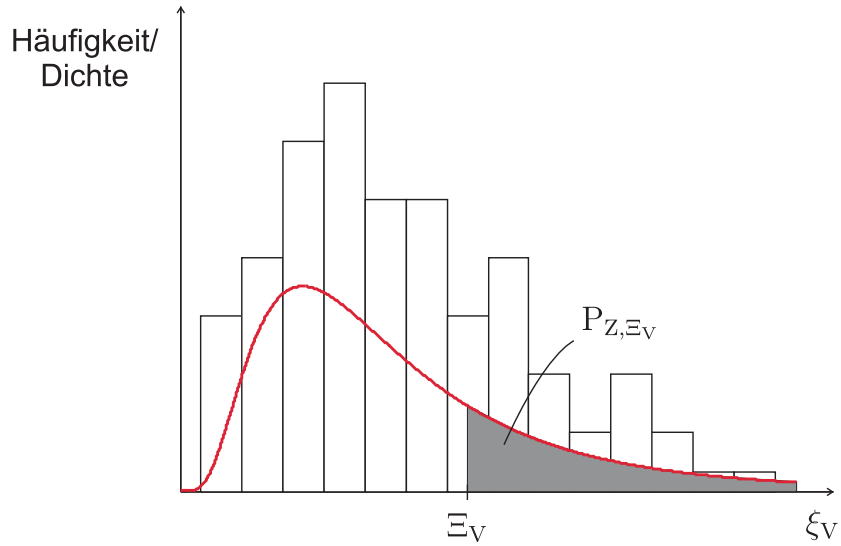


Abbildung 2.9: Quantifizierte Verfügbarkeitskontinuität in Abhängigkeit vom Parameter Ξ_V

Die zuzuordnende Wahrscheinlichkeit, dass im Mittel auf einen unverfügbaren Messwert höchstens $\Xi_{UV} - 1$ unverfügbare Werte folgen ist

$$P_{UZ,\Xi_{UV}} = \text{Prob}(\xi_{UV} \leq \Xi_{UV}).$$

Eine hohe Wahrscheinlichkeit deutet ebenfalls auf eine hohe Zuverlässigkeit hin.

KAPITEL 3

Theorie der zeitinvarianten Messunsicherheit

Im vorangegangenen Kapitel 2 wurden für alle Eigenschaften der Messqualität – bis auf die Messunsicherheit – Maße zu deren Quantifizierung auf Basis einer Häufigkeitsstatistik vorgestellt. Zur Quantifizierung der Messunsicherheit haben sich in der Metrologie mehrere und vergleichsweise aufwändige Verfahren etabliert, die daher in diesem Kapitel separat behandelt werden. Dieses Kapitel bietet zu Beginn eine Übersicht über den Wandel vom Messfehlerkonzept hin zum Messunsicherheitskonzept. Darauf aufbauend wird das gängige Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung nach DIN V ENV 13005 [29] in Abschnitt 3.2 eingeführt. In Abschnitt 3.3 wird ein alternativer Ansatz zur Ermittlung einer Messunsicherheit mittels Monte-Carlo-Simulationen vorgestellt. Der Monte-Carlo-Ansatz empfiehlt sich zur Verifizierung der zuvor mit dem Standardverfahren ermittelten Messunsicherheitsangabe [62, S. 35]. Die Vor- und Nachteile beider Verfahren werden in Abschnitt 3.5 gegenübergestellt und diskutiert. Das Kapitel schließt mit der Darstellung einer Methode zur Bereichskalibrierung unter Berücksichtigung der Messunsicherheit in Abschnitt 3.6.

3.1 Historie der Messunsicherheitsbetrachtung

Die Messgröße wird allgemein als stochastische Größe der Form

$$Y = \mu + \sigma Z$$

modelliert, die durch einen Erwartungswert $E\{Y\} = \mu$ und eine Varianz $\text{VAR}\{Y\} = \sigma^2$ charakterisiert wird. Die Größe Z wird durch eine normierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben. Im Folgenden wird, wie in der Literatur üblich, vereinfachend vom *Wert der Größe* gesprochen, wenn der Erwartungswert gemeint ist. Grundsätzlich sind alle die Messgröße bestimmenden Charakteristika, d. h. ihre Zentralität (Erwartungswert), ihre Streuung (Standardabweichung) oder die genaue Ausprägung der Beziehung zu anderen Größen (Korrelationskoeffizienten) unbekannt und unbestimmbar. Diese, fest in der Metrologie verankerte, Sichtweise spiegelt in besonderer Weise die demütige Erkenntnis wieder, dass alles Wissen nur ein unvollständiger Teil des gesamten Wissens mit unbekanntem Ausmaß ist. Eine Messgröße lässt sich niemals durch einen einzigen Messwert charakterisieren. Somit müssen dem Messergebnis weitere Attribute beigeordnet werden. Diese Problematik wird mit dem in DIN V ENV 13005 [29] beschriebenen Standard-GUM-Verfahren angegangen.

3.1.1 Entstehung und Etablierung des GUM

Trotz der seit langer Zeit in den Natur- und Ingenieurwissenschaften etablierten klassischen Fehlerrechnung ergab sich die Notwendigkeit, ein einheitliches und auf mathematischer Basis bestimmbares Qualitätsmerkmal für Messungen – die Messunsicherheit – zu entwickeln. Ein Leitfaden, der eine standardisierte Beurteilung der Messunsicherheit ermöglicht, ist der sogenannte *GUM*. Der GUM-Leitfaden (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [62] bzw. [29]) wurde vom Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) im Auftrag des Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) erarbeitet. Dem JCGM gehören die Internationale Organisation für Normung (ISO), die Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC), die Internationale Organisation für gesetzliches Messwesen (OIML), die Internationale Union für reine und angewandte Physik (IUPAP), die Internationale Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC) sowie die Internationale Föderation für klinische Chemie (IFCC) an. Die Zusammensetzung des Gremiums zeigt, dass der Leitfaden vor allem aus Sicht der klassischen, naturwissenschaftlich geprägten Labormesstechnik entwickelt wurde.

Der erste Entwurf des GUM wurde 1993 veröffentlicht und im Jahr 2008 überarbeitet. Die dabei verwendeten Begriffsdefinitionen basieren auf dem Internationalen Wörter-

buch der Metrologie (VIM) [20], welches erstmals 1984 von den Organisationen BIPM, IEC, ISO, OIML herausgegeben wurde [29, S. 104]. Der GUM ist bis heute keine eigenständige Norm, sondern eine zu beachtende technische Regel der IEC/ISO bzw. im deutschsprachigen Raum eine Vornorm des DIN. Dennoch müssen alle Aussagen bzgl. Messunsicherheiten in Normen GUM-konform sein [119]. Des Weiteren werden Prüflaboratorien nach DIN EN ISO/IEC 17025 [28] akkreditiert, in der es heißt: „*Das Laboratorium muss [...] für die Schätzung der Messunsicherheit sowie für die statistische Auswertung von Prüf- und/oder Kalibrierdaten zweckmäßige Methoden und Verfahren verwenden. [...] Verfahren, die als internationale, regionale oder nationale Normen veröffentlicht sind, müssen vorzugsweise angewendet werden.*“. Ansonsten müssen Verfahren genutzt werden, die „...*von angesehenen technischen Organisationen oder in einschlägigen wissenschaftlichen Texten oder Zeitschriften veröffentlicht wurden.*...“ [28, S. 36]. Die ISO sieht das GUM-Verfahren als *das* Verfahren für zukünftige Normen an, bei der Messergebnisse eine Rolle spielen [128].

Das im Leitfaden vorgeschlagene Verfahren ist im Fachgebiet der Metrologie auf hohe Akzeptanz gestoßen und wird von allen akkreditierten Laboratorien angewendet [119]. Erfahrungsgemäß wird das GUM-Verfahren über das Fachgebiet der Metrologie und der Qualitätsbewertung durch Prüflaboratorien hinaus nur selten angewendet. Insbesondere bei Messungen im Rahmen technischer Anwendungen (z. B. Regelungen von Systemen) abseits der typischen Messlabore werden üblicherweise keine GUM-konformen Messunsicherheitsbeurteilungen durchgeführt, da Messdaten meist gefiltert und direkt von Rechnerprogrammen verarbeitet werden, was durch das Standard-GUM-Verfahren nicht abgebildet wird. Weitere Gründe sind die schwierige Verständlichkeit des Leitfadentextes [128] und die verwendeten Methoden der Stochastik. Die Einarbeitung in die notwendigen mathematischen Zusammenhänge wird in der Anwendung häufig aus Ressourcenmangel gescheut. Eine weitere Schwierigkeit bei der Anwendung des Verfahrens besteht in der aufwändigen Aufstellung eines Messmodells, da hierfür keine Herangehensweise vorgestellt wird [119]. Hinsichtlich der Problematik der Modellbildung wurde im PTB-DIN-Arbeitskreis *Umsetzung des GUM* eine strukturierte Methode zur Erstellung von Messmodellen erarbeitet, die in den folgenden Abschnitten bei der Erläuterung des Verfahrens berücksichtigt wird.

3.1.2 Unterschiede des GUM zur klassischen Fehlerrechnung

Das im GUM verfolgte Konzept der Messunsicherheit basiert auf der Darlegung von Kenntnissen im Sinne des Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dem gegenüber steht die bereits seit langem bekannte Sichtweise, bei der ermittelte Messabweichungen mit Hilfe von Methoden der Häufigkeitsstatistik untersucht werden, was gemeinhin als Fehlerrechnung bezeichnet wird [20, S. 5-6][117, S. 417-418]. Obwohl sich in der me-

trologischen Literatur der Begriff *Messfehler* im Zusammenhang mit der aus der Mathematik bekannten Fehlerrechnung eingebürgert hat, ist der Begriff *Messfehler* nicht definiert. In der Literatur ist mit dem Begriff *Messfehler* stets der wohldefinierte Begriff der *Messabweichung* gemeint. Der Ausdruck *Messfehler* lehnt an den englischen Begriff *measurement error* an, der allerdings in der deutschen Fachsprache korrekterweise mit Messabweichung übersetzt werden muss [20, 2.16]. Des Weiteren impliziert der Begriff *Messfehler*, dass ein Teil des Messprozesses nicht korrekt abgelaufen ist. In [2, S. 44] wird vorgeschlagen den Begriff *Messfehler* nur zu verwenden, wenn das Resultat eines Bedienfehlers oder einer Messung mit einem defekten Messgerät gemeint ist. In [14] werden diese Messfehler als *grobe Abweichungen* bezeichnet. Liegt ein derartiger Messfehler vor, ist der Messwert unbrauchbar und muss verworfen werden. Grundsätzlich wird bei allen statistischen Methoden vorausgesetzt, dass alle Messfehler beseitigt wurden [14].

Die Grundannahme beim Konzept der Messgenauigkeit besteht darin, dass die Messgröße direkt und mehrfach unter Wiederholbedingungen gemessen wird. Es wird das Modell

$$y_{\text{mess}} = y + \Delta_s + \Delta_z \quad (3.1)$$

zu Grunde gelegt, bei dem y_{mess} den angezeigten Wert, y den zu ermittelnden Wert, Δ_s die systematische und Δ_z die zufällige Komponente der Messabweichung darstellt (nach [54, S. 532]). Die Messwerte werden mit Hilfe der klassischen Fehlerrechnung analysiert, bei der die systematischen und zufälligen Messabweichungen separat betrachtet werden.

Für die Beantwortung der Frage, wie sich die systematischen Abweichungen von Einflüssen von ihrem angenommenen Wert in der Messgröße widerspiegeln, wird das Gesetz der linearen Fortpflanzung angewendet, das die allgemeine Form

$$\Delta y = \sum_{r=1}^R \left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_R)}{\partial X_r} \right|_{\bar{x}} \Delta x_r \quad (3.2)$$

besitzt [2, S. 46]. Hierbei bezeichnet f eine um den Arbeitspunkt \bar{x} linearisierte Funktion, die den Zusammenhang der R Eingangsgrößen \mathbf{X} und der Ausgangsgröße Y beschreibt. Bei diesem Gesetz wird eine Aussage darüber getroffen, wie empfindlich die Messgröße gegenüber den systematischen Abweichungen der Eingangsgrößen ist. Ein wesentlicher Schwachpunkt bei der Anwendung dieses Gesetzes ist, dass natürlicherweise nur die bekannte systematische Messabweichung $\Delta_s^{\text{bek.}}$ jeder Eingangsgröße berücksichtigt werden kann. Die Fehlerrechnung bietet keinen Ansatz zur Behandlung der unbekannten systematischen Messabweichung. Der unbekannte Anteil $\Delta_s^{\text{unbek.}}$ bleibt unberücksichtigt, was zu einer Unterschätzung der systematischen Messabweichung führt.

Neben den systematischen Messabweichungen werden zufällige Messabweichungen betrachtet, deren Fortpflanzung sich durch das Gaußsche-Fortpflanzungsgesetz

$$s^2(Y) = \sum_{r=1}^R \left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_R)}{\partial X_r} \right|_{\bar{x}}^2 s^2(x_r(1), \dots, x_r(K)) \quad (3.3)$$

beschreiben lässt [2, S. 51], wobei $s^2(x_r(1), \dots, x_r(K))$ die empirische Varianz von K vielen Stichprobenmessungen ist und somit ein Maß für die zufälligen Einflüsse auf die Messung darstellt.

Die Ermittlung einer Messabweichung setzt die Kenntnis eines *wahren* Werts voraus. Dieser ist jedoch stets unbekannt, womit auch die Messabweichung unbekannt ist und nicht angegeben werden kann. Das Konzept des wahren Werts hat sich daher in der Praxis als unbefriedigend und als nicht ausgereift erwiesen. Das Konzept der Messunsicherheit kommt daher bewusst ohne das Konstrukt des wahren Wertes aus.

Die Unterscheidung von systematischen und zufälligen Effekten (vgl. Gleichung (3.1)) wird beim GUM-Leitfaden nicht fortgeführt. Die in Form von Unsicherheitsbeiträgen ausgedrückte Unkenntnis über den Messprozess in systematische und zufällige Unkenntnis zu unterscheiden, erscheint kaum vorstellbar [129, S. 16], denn zufällige Effekte können als systematische Effekte angesehen werden, die jedoch mit dem derzeitigen Kenntnisstand nicht beschrieben werden können [2, S. 44]. Im Gegenzug tragen unbekannte systematische Effekte zur Unsicherheit über den Messprozess in gleichem Maße bei wie zufällige Effekte. Die bei der klassischen Fehlerrechnung vorzunehmende Unterteilung der Messabweichung in einen systematischen und einen zufälligen Anteil lässt sich in der Realität somit nicht umsetzen. Dies ist problematisch, da von dieser Unterscheidung abhängt, ob eine Messabweichung linear (vgl. Gleichung(3.2)) oder quadratisch (vgl. Gleichung(3.3)) fortgepflanzt werden muss [54, S. 564].

Im GUM-Leitfaden wird die Modellstruktur

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_R)$$

angesetzt, wobei davon ausgegangen wird, dass alle bekannten systematischen Einflüsse bereits korrigiert wurden und die damit verbundenen Korrektionsunsicherheiten in Form von Eingangsgrößen berücksichtigt werden. Im Gegensatz zu der bei der Fehlerrechnung verwendeten Modellform (3.1) liegt diesem Ansatz der Gedanke zu Grunde, dass die Messgröße nicht direkt gemessen werden kann, sondern die Messgröße zu einer angezeigten Größe führt, welche stets von zahlreichen Einflussgrößen überlagert wird.

Der GUM kombiniert die Methoden und Sichtweisen der Häufigkeits-Statistik und der Bayes-Statistik. Letztere basiert auf der ursprünglichen, von Jakob Bernoulli, Thomas

Bayes und Pierre-Simon Laplace vertretenden Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wonach die Wahrscheinlichkeit die „*numerische Beschreibung des aktuellen Standes der unvollständigen Kenntnis*“ [146, S. 37] über einen Sachverhalt ist. Dies bedeutet, dass die Beurteilung von Unsicherheiten bzgl. der Eingangsgrößen sowohl mittels Stichprobenmessungen als auch – oder ausschließlich – durch begründete Annahmen möglich sind, die durch Literaturangaben oder Expertenwissen gestützt werden. Neben dem Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriff wird das *Prinzip der maximalen Informationsentropie* nach Edwin Thompson Jayens [66] eingeführt. Dieses Prinzip besagt, dass unter Berücksichtigung der vorliegenden Kenntnisse über eine Größe X stets die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_X(x)$ zur Charakterisierung der Größe zu Grunde zu legen ist, die die von Claude Elwood Shannon definierte Informationsentropie

$$H := - \int_{-\infty}^{\infty} g_X(x) \log(g_X(x)) \, dx$$

maximiert [115, S. 35]. Hierdurch wird eine vorurteilsfreie Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ausgewählt, die sich ausschließlich auf tatsächlich vorliegende Informationen stützt und nicht auf vorstellbare, aber nicht vorhandene Informationen [146, S. 60]. Eine große Entropie steht für eine große Unkenntnis [146, S. 63]. Somit wird verhindert, dass auf Basis angenommener, aber tatsächlich nicht gegebener Information, ungerechtfertigter Weise Größenwerte ausgeschlossen werden. Die anzunehmende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann selbst als Zufallsgröße angesehen werden. Die Informationsentropie ist dann ein Maß dafür, wie wahrscheinlich die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist [145]. Die Einführung des Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs und des Prinzips der maximalen Entropie stellen die wichtigsten Neuerungen des GUM-Verfahrens dar.

Die aus einer statistischen Analyse von Wiederholmessungen resultierenden relativen Häufigkeiten werden beim GUM-Verfahren nicht verwendet. Stattdessen wird nach dem Prinzip der maximalen Entropie eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angenommen, welche die Kenntnis über die gemessene Eingangsgröße im Bayesschen Sinne repräsentiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion quantifiziert den *Zustand des Wissens* über den Größenwert bzw. den *Grad des Vertrauens* in die Abschätzung des Werts im Sinne des Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Sie darf nicht als Grenzwert einer Häufigkeitsverteilung missverstanden werden [145][146, S. 3]. Die aus Messungen resultierenden Häufigkeiten dienen dazu, die angenommene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu parametrieren (Unsicherheit *Typ-A*). Nach dem Prinzip der maximalen Entropie ist die anzusetzende Verteilungsfunktion bei einer Wiederholmessung die Normalverteilung [81].

Die zweite Art von Beurteilung ist nicht statistischer Natur und kommt ohne die Durchführung von Messungen aus (Unsicherheit *Typ-B*). Hierbei können neben dem

besten Schätzwert für eine Eingangsgröße und der Standardunsicherheit jede Art von zusätzlichen Kenntnissen über die zu beurteilende Größe berücksichtigt werden, so dass unter Berücksichtigung des Prinzips der maximalen Entropie möglicherweise andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen als die Normalverteilung angesetzt werden müssen. Beispielsweise führt die Kenntnis einer oberen und unteren Schranke für den Wert der Eingangsgröße auf eine Gleichverteilung [81], da die Annahme einer anderen Form mehr Kenntnisse bedingen würde.

Den Unterschied zwischen einer Typ-A- und einer Typ-B-Unsicherheit veranschaulicht das Beispiel eines Münzwurfs. Bei einer statistischen Analyse wird die Münze mehrfach geworfen. Die resultierende relative Häufigkeit nach einer endlichen Anzahl an Würfen dafür, dass *Kopf* oben liegt sei 0,46. Demnach wird der Aussage „Die Münze zeigt *Kopf*“ die Wahrscheinlichkeit 0,46 zugeordnet. Bei einer Typ-B-Beurteilung wird die grundsätzliche Beschaffenheit der Münze betrachtet. Da keine Kenntnisse darüber vorliegen, welches Ergebnis ein Münzwurf liefern wird und beide Ereignisse gleich wahrscheinlich erscheinen, wird der Wahrscheinlichkeit dafür, dass *Kopf* oben liegt, sinnvollerweise der Wert 0,5 zugeordnet. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Beurteilung, die auf das Durchführen von Messungen verzichtet, sogar sinnvoller als eine Typ-A-Beurteilung sein kann, da sie sich nicht auf den ungewissen Ausgang von Messungen stützt, die nie durchgeführt wurden.

Eine wesentliche Stärke des Verfahrens ist, dass Typ-A- und Typ-B-Unsicherheiten zwar auf unterschiedliche Art und Weise bewertet, aber beim weiteren Vorgehen einheitlich behandelt werden. Dies geschieht auf mathematischer Basis durch das sogenannte Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz

$$u_{\bar{y}}^2 = \sum_{r=1}^R \left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_R)}{\partial X_r} \right|_{\bar{x}}^2 u_{\bar{x}_r}^2,$$

welches auf dem Gaußschen-Fortpflanzungsgesetz (3.3) basiert. Die Notation $u_{\bar{y}}$ bedeutet, dass die Messunsicherheit u dem besten Schätzwert \bar{y} für die Messgröße Y *beigeordnet* wird. Dies geschieht auf Basis der Kenntnisse, welche zum besten Schätzwert \bar{y} für Y geführt haben. Die Messunsicherheit und der beste Schätzwert bilden ein aus einer gemeinsamen Kenntnismenge resultierendes Wertepaar, das die Messgröße charakterisiert. Es wird bewusst die Notation $u(\bar{y})$ aus [29] vermieden, da keine funktionale Beziehung zwischen u und \bar{y} besteht. Genau wie der beste Schätzwert gründet sich die ermittelte Messunsicherheit allein auf die bekannten Kenntnisse über die Messgröße und ist somit genau bekannt. Sie ist keine Aussage über eine mögliche Streuung von Werten, die möglicherweise aufgetreten wären, wenn die Messung wiederholt werden würde und stützt sich – im Gegensatz zur Sichtweise der Fehlerrechnung – nicht auf Kenntnisse, die denkbar wären aber gar nicht vorliegen [153, S. 6]. Die Messunsicherheit sagt somit nichts über relative Häufigkeiten aus, auch wenn zum Teil Methoden

der Häufigkeitsstatistik für die Beurteilung einzelner Eingangsgrößen genutzt wurden [145].

Das propagierte Konzept der Messunsicherheit erlaubt die ermittelte Messunsicherheit einer Zwischenmessgröße bei weiterführenden Messungen als Eingangsunsicherheit weiter zu verwenden. Die ursprünglichen Eingangsunsicherheiten der vorangegangenen Messung müssen dann nicht mehr betrachtet werden. Somit erfüllt das GUM-Verfahren die in [146, S. 180-182] definierte *Konsistenz von Auswerteverfahren*, wonach das Endergebnis einer Beurteilung nicht davon abhängen darf, ob und in wie viele Teilschritte die Messunsicherheitsbeurteilung zerlegt wird. Die Konsistenz ist bei der häufig angewendeten Fortpflanzung von maximalen Betragsabweichungen (vgl. Gleichung (3.2)) nicht gegeben, da bei einer Zerlegung dieser Fortpflanzung in einzelne Teilschritte die letztliche Gesamtabweichung überschätzt wird [146, S. 182]. Die nächsten Abschnitte zeigen konsistente Verfahren auf, mit denen eine Messunsicherheitsangabe auf systematische und nachvollziehbare Weise ermittelt wird.

3.2 Standard-GUM-Verfahren zur Beurteilung der Messunsicherheit

Das im GUM beschriebene Verfahren zur Beurteilung der Messunsicherheit lässt sich sinnvollerweise in zwei Phasen mit insgesamt sechs Schritten gliedern. Während der ersten Phase wird zunächst die betrachtete Messaufgabe beschrieben. Im zweiten Schritt muss ein mathematisches Modell der Messung aufgestellt werden. Anschließend werden die im Modell enthaltenen Größen mittels Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen modelliert. Diese Schritte der ersten Phase können nur manuell von einer mit dem Messprozess vertrauten Person ausgeführt werden, da hierbei Kreativität und Expertenwissen für die Modellbildung und die Bewertung der Größen erforderlich sind. Typischerweise stellen die Modellierung und die Bewertung den schwierigsten und bzgl. der Ressourcen aufwändigsten Teil der Messunsicherheitsbeurteilung dar.

In der zweiten Phase des Verfahrens werden die dargelegten Kenntnisse herangezogen, um auf mathematischer Basis eine Messunsicherheit zu berechnen (Schritt 4) und ein zum geforderten Grad an Vertrauen passendes Überdeckungsintervall zu bestimmen (Schritt 5). Der Leitfaden legt besonderen Wert darauf, das vollständige Ergebnis der Beurteilung in einem separaten, letzten Schritt 6 anzugeben. Da diese Schritte nach einem festen Schema durchgeführt werden, können sie automatisiert von einem Rechnerprogramm abgearbeitet werden.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte der Messunsicherheitsbeurteilung detailliert erläutert. Hierbei wird jeweils zunächst der einfache Fall mit einer einzelnen Messgröße (vgl. [29]) und anschließend dessen Verallgemeinerung auf beliebig viele Messgrößen (vgl. [67]) dargestellt.

3.2.1 Schritt I: Beschreibung der Messung

Zu Beginn der Messunsicherheitsbeurteilung muss die Messaufgabe vollständig beschrieben werden. Dies umfasst die *Definition der Messgröße*, das zu Grunde liegende *Messprinzip*, die *Messmethode* sowie das *Messverfahren* (vgl. Unterabschnitt 2.2.1).

Hinreichende Definition der Messgröße

Die Komplexität der Messgrößendefinition lässt sich bereits anhand eines sehr einfachen Beispiels aufzeigen. Ein Beispiel für die Definition der Messgröße ist der *Abstand der beiden Linien*, die in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Intuitiv ist der Abstand d_2 die

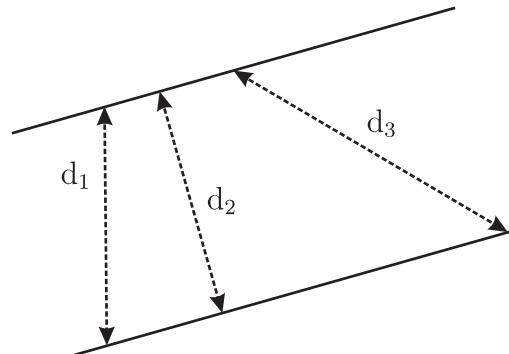


Abbildung 3.1: Messung des Abstands zweier paralleler Linien

zu messende Größe. Jedoch erfüllt jeder der drei dargestellten Abstände die Definition der Messgröße. Die Definition der Messgröße ist unvollständig, da die Zusatzinformation *senkrechter Abstand* fehlt. Auch wenn diese Information zur Definition hinzugefügt wird, bleibt die Definition unvollständig, da z. B. bei mikroskopischer Betrachtungsweise die Linien auf dem Papier aus einzelnen Pixeln bestehen und der senkrechte Abstand somit an verschiedenen Stellen unterschiedliche Werte besitzt. Der senkrechte Abstand variiert – selbst bei idealer Messung – im Mikrometerbereich, je nachdem an welcher Stelle er gemessen wird. Dies lässt sich beliebig fortsetzen, sodass konstatiert werden

kann: Da zur Beschreibung der Messgröße nur eine endliche Anzahl an Informationen genutzt werden kann, ist jede Messgrößendefinition stets unvollständig. In der Praxis muss somit eine für die Messaufgabe hinreichend genaue Definition gewählt werden. Entsprechend der Definition nach [20, 2.11] ist der *wahre Wert* einer Größe der Größenwert, der mit der Definition einer Größe in Übereinstimmung ist. Somit ist jeder der dargestellten Abstände ein *wahrer Wert*. Die Unvollständigkeit der Messgrößendefinition führt zu der Erkenntnis, dass es nicht, wie in der Literatur oft angegeben, *den wahren Wert* gibt, sondern eine beliebig mächtige Menge an *wahren Werten* existiert. Dies ist ein wesentlicher Grund dafür, dass der Begriff *wahrer Wert* im GUM [29] nicht verwendet wird.

Beschreibung von Messprinzip, Messmethode und Messverfahren

Neben der hinreichenden Beschreibung der betrachteten Messgröße muss das angewendete Messprinzip genannt werden. Das Messprinzip beschreibt, welcher physikalische Effekt bei der Messung genutzt wird. Beispiele für Messprinzipien sind die Ausnutzung des Doppler-Effekts oder des photovoltaischen Effekts.

Das strukturelle Vorgehen bei der Messung wird durch die Messmethode festgelegt. Unter den existierenden Messmethoden haben sich drei wesentliche Grundformen herauskristallisiert, die auf nahezu alle Messaufgaben angewendet werden können bzw. die sich leicht an die gegebene Messaufgabe anpassen lassen [119]. Die drei grundlegenden Messmethoden sind die *direkte Messung*, der *direkte Vergleich anzeigender Messgeräte* und die indirekte Messmethode *Substitution von Maßverkörperungen*. Ein Beispiel für eine direkte Messung ist die Gewichtsmessung eines Objekts mit Hilfe einer Federwaage. Die Messung der Wassertemperatur mittels zweier gleichzeitig in das Wasser eingetauchter Thermometer im Rahmen einer Kalibrierung ermöglicht einen direkten Vergleich beider Anzeigen. Bei der Substitutionsmethode wird beispielsweise das Gewicht eines Wägestücks mit einer Waage ermittelt. Das Wägestück wird anschließend durch ein anderes ersetzt, um so die beiden Anzeigen indirekt miteinander vergleichen zu können.

Das genutzte Messprinzip und die Messmethode sind Bestandteile des Messverfahrens. Grundsätzlich schließt die Beschreibung des Messverfahrens auch eine hinreichend genaue Beschreibung des Messaufbaus, aller relevanten Messbedingungen und aller durchzuführenden Tätigkeiten zur Erlangung eines Messergebnisses mit ein. Die Beschreibung der Messung muss so umfangreich sein, dass die Messung von anderen Personen nachvollzogen und erneut durchgeführt werden kann.

3.2.2 Schritt II: Modellierung der Messung

Der wichtigste und zugleich schwierigste Aspekt bei der Beurteilung der Messunsicherheit ist das Aufstellen des Messmodells. Analog zur Definition der Messgröße ist auch das Modell einer Messung lediglich eine Approximation des tatsächlichen Zusammenhangs aller beteiligten Einflüsse. Die hinreichend genaue Widerspiegelung dieses Zusammenhangs kann sowohl auf Basis theoretischer Kenntnisse als auch auf Basis von empirischen Kenntnissen erfolgen. Die allgemeine Form der Modellgleichung lautet

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_R), \quad (3.4)$$

wobei die sogenannte *Messfunktion* f [20, 2.49] eine meist nichtlineare Funktion ist, die alle für die Messung relevanten Größen, die *Eingangsgrößen* [20, 2.50], eindeutig auf die Messgröße Y abbildet [29, S. 15]. Alle auftretenden Größen sind stochastische Größen und stellen jeweils einen Schätzer für die damit assoziierten physikalischen Größen der Messung dar.

Für die Beurteilung der Messunsicherheit wird die nichtlineare Messfunktion (3.4) mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung linearisiert. Eine Voraussetzung hierfür ist, dass die Modellgleichung in der Umgebung der Linearisierungsstellen stetig differenzierbar ist. Es ist ohne Nachteile erlaubt mit einem linearen Modell zu arbeiten, solange die den Eingangsgrößen beigeordneten Unsicherheiten klein sind. Die Linearisierung verdeutlicht Abbildung 3.2 (nach [119]) beispielhaft für ein univariates Messmodell. Die dargestellte Modellgleichung

$$Y = f(X)$$

wird durch den linearen Zusammenhang

$$y = f(\bar{x}) + c(x - \bar{x})$$

ersetzt. Die Werte \bar{x}_r und \bar{y} bezeichnen die bestmöglichen Schätzwerte für die Ein- bzw. Ausgangsgröße. Solange der Wert x der Eingangsgröße X innerhalb des Intervalls $[\bar{x} - u_{\bar{x}} ; \bar{x} + u_{\bar{x}}]$ liegt, tritt ein tolerierbarer Linearisierungsfehler auf und das Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung kann angewendet werden. Allerdings ist bzgl. der Anwendbarkeit des Verfahrens zu prüfen, ob der bei der Linearisierung verwendete Arbeitspunkt in der Nähe einer Extremstelle der nichtlinearen Messfunktion f liegt. In diesem Sonderfall führt die lineare Unsicherheitsfortpflanzung (3.1.2), wie Abbildung 3.3 zeigt, auf eine Nivellierung der Messunsicherheit, was ein unbefriedigendes Resultat darstellt [156] und alternative Verfahren wie den in Abschnitt 3.3 gezeigten Monte-Carlo-Ansatz erfordert.

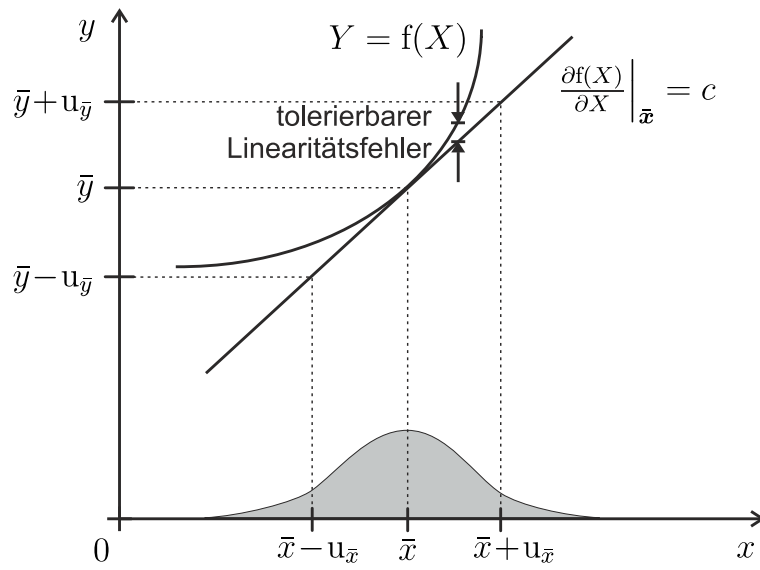


Abbildung 3.2: Linearisierung eines univariaten Messmodells

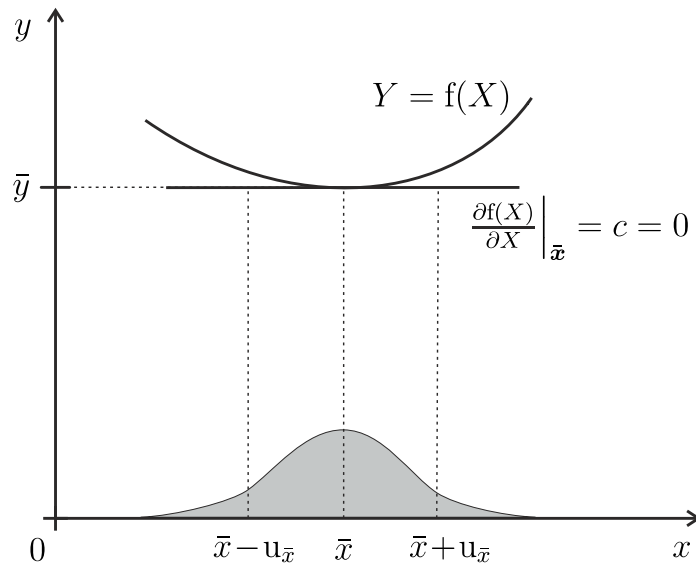


Abbildung 3.3: Linearisierung eines univariaten Messmodells an einer Extremstelle

Allgemein ergibt sich nach [9, S. 404,407,409] für eine Funktion mit mehreren Variablen $Y = f(X_1, \dots, X_R)$ die Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung zu

$$y = f(X_1, X_2, \dots, X_R)|_{\bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_R} \Big|_{\bar{x}} (x_R - \bar{x}_R) \quad (3.5)$$

$$y - \bar{y} = c_1(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + c_R(x_R - \bar{x}_R)$$

wobei die Linearisierung um den Punkt $\bar{x} = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_R)^T$ erfolgt. Das 0.-Glieder \bar{y} entspricht dabei dem zu erwartenden Wert der Messgröße bei einer idealen Messung. Die weiteren Glieder stellen die anteilige Messunsicherheit der jeweiligen Eingangsgrößen dar.

Zur Berechnung der Messunsicherheit wird im Folgenden mit dem linearisierten Modell

$$\delta Y = c_1 \delta X_1 + \dots + c_R \delta X_R$$

entsprechend Gleichung (3.5) gearbeitet, bei dem sich die gewichteten Eingangsgrößen additiv auf die Messgröße auswirken. Die durch die Linearisierung auftretenden Delta-Größen zeigen an, dass die Größen auf einen Arbeitspunkt bezogen sind. Der Arbeitspunkt kann frei gewählt werden und ist somit exakt bekannt. Die Delta-Größen stellen nur eine Verschiebung des Größenwerts dar, sodass die der Delta-Größen beigeordneten Unsicherheiten denen der absoluten Größen entsprechen. Im Falle einer signifikanten Nichtlinearität der Messfunktion f muss Gleichung (3.5) um Glieder höherer Ordnung erweitert werden.

MIMO-Messmodelle. Das in [29] vorgestellte Verfahren sieht nur Modelle für Messungen mit einer Messgröße vor. Das Modell (3.4) lässt sich jedoch leicht zu einem MIMO-Messmodell

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_M \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_R) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_R) \\ \vdots \\ f_M(X_1, X_2, \dots, X_R) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

d. h. zu einem Modell mit beliebig vielen Messgrößen erweitern [67, S. 15]. Die Messfunktion \mathbf{f} stellt nun eine Vektorfunktion dar, welche die R Eingangsgrößen auf die M Messgrößen abbildet.

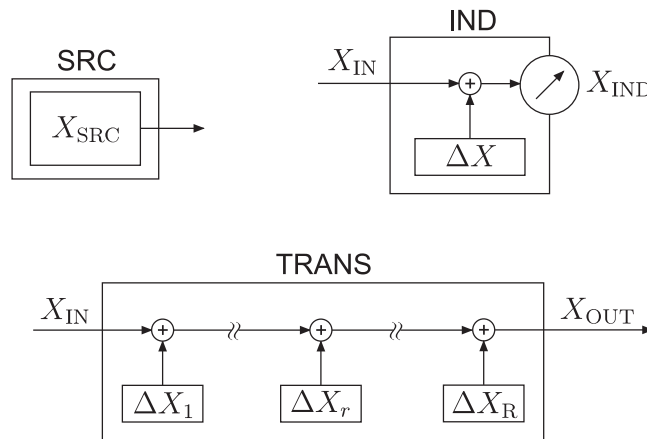


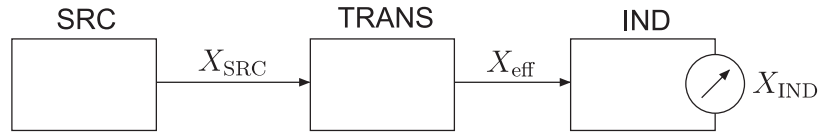
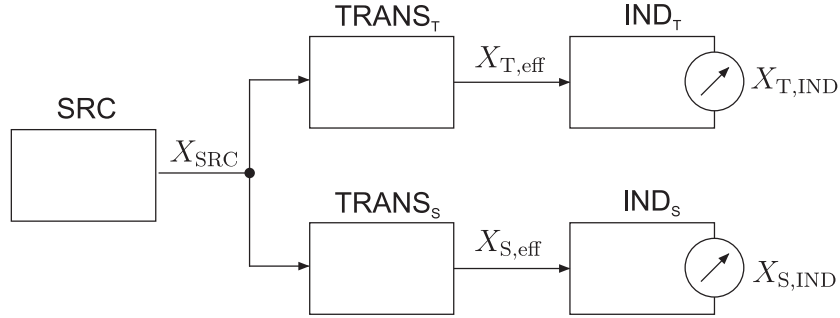
Abbildung 3.4: Funktionsgrundelemente der Modellbildung

Methode zur Aufstellung des Messmodells

Für die Messunsicherheitsbeurteilung setzt der Leitfaden ein Modell der Form (3.6) voraus und benennt einige exemplarische Modelle für die beigefügten Messbeispiele. Allerdings wird keine Methode aufgezeigt, mit Hilfe derer ein derartiges Modell erstellt werden kann. Mangels einer geschlossenen Theorie zur Modellbildung wurde in [119] ein strukturiertes Vorgehen zur Modellbildung vorgeschlagen. Als Basis für die strukturierte Modellbildung dient das Beschreibungsmittel *Blockschaltbild*. Nach dem Prinzip der Messkette lässt sich der komplette Ursache-Wirkungs-Zusammenhang, unabhängig vom genutzten Messprinzip, mittels einer Serie von Funktionsblöcken beschreiben. Dabei wurden drei Grundmodellformen identifiziert, mit denen sich nahezu alle vorkommenden Messaufgaben abbilden lassen. Die drei dabei verwendeten Funktionsblöcke zeigt Abbildung 3.4. Die Parameterquellen (SRC) generieren eine messtechnisch erfassbare Größe X_{SRC} . Die Transformationselemente (TRANS) repräsentieren Signalbeeinflussungen wie z. B. Signalverstärkung, Signaldämpfung oder eine Analog-Digital-Wandlung. Die dritte Art von Funktionsbausteinen sind die Anzeigeeinheiten (IND) mit der Messabweichung ΔX .

Die Struktur des Blockschaltbilds zur Darstellung des Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs wird von der verwendeten Messmethode bestimmt. Es ergeben sich drei Grundstrukturen, die mit den drei grundlegenden Messmethoden *Direkte Messung*, *direkter Vergleich anzeigender Messgeräte* und der *Substitution von Maßverkörperungen* korrespondieren.

Abbildung 3.5 zeigt die generische Struktur bei der Messmethode *Direkte Messung*. Bei diesem unverzweigten Ursache-Wirkungs-Zusammenhang wird die Größe X_{SRC} durch Einflüsse $\Delta X_1, \dots, \Delta X_R$ verändert, die durch das Transformationsglied repräsentiert werden. Das Anzeigeelement zeigt die Summe X_{IND} aus der am Eingang effektiv wirk-


Abbildung 3.5: Generische Struktur bei der Messmethode *Direkte Messung*

Abbildung 3.6: Generische Struktur bei der Messmethode *Direkter Vergleich*

samen Größe X_{eff} und der Messabweichung des Anzeigeelements ΔX an. Bei einer direkten Messung ist X_{SRC} die Messgröße. Bei einer Kalibrierung symbolisiert X_{SRC} eine Referenzgröße. Die Messgröße ist in diesem Fall die Messunsicherheit des Anzeigeelements ΔX .

Die generische Struktur der Messmethode *Direkter Vergleich* zeigt Abbildung 3.6. Diese Messmethode wird bei Kalibrierungen von Messgeräten verwendet. Dieselbe Größe X_{SRC} wird zum einen durch das zu kalibrierende Messgerät gemessen (oberer Zweig) und zum anderen durch ein Messgerät, das einen Referenzwert anzeigt (unterer Zweig). Die Messgröße ist die Messabweichung $\Delta X_{\text{T,IND}}$ des zu kalibrierenden Messgeräts.

Die in Abbildung 3.7 dargestellte Struktur der Messmethode *Substitution* wird bei Kalibrierungen von Maßverkörperungen genutzt. Zunächst wird mit einem Messgerät der Wert der zu kalibrierenden Maßverkörperung gemessen. Anschließend wird diese Maßverkörperung durch ein Normal ersetzt und dessen Wert ebenfalls gemessen. Aus beiden Messergebnissen wird die Messabweichung der zu kalibrierenden Maßverkörperung bestimmt. Die gestrichelt gezeichneten Signalflusspfeile deuten an, dass die Wirkung nicht zeitgleich, sondern hintereinander auftritt, da mit ein und demselben Messgerät zu einem Zeitpunkt immer nur eine Messgröße gemessen werden kann.

Nachdem der vollständige Zusammenhang ausgehend von der Ursache X_{SRC} bis hin zur Wirkung X_{IND} mit allen beteiligten Größen durch Funktionsblöcke modelliert wurde, kann der korrespondierende mathematische Zusammenhang

$$X_{\text{IND}} = h(X_{\text{SRC}}, X_1, \dots, X_R)$$

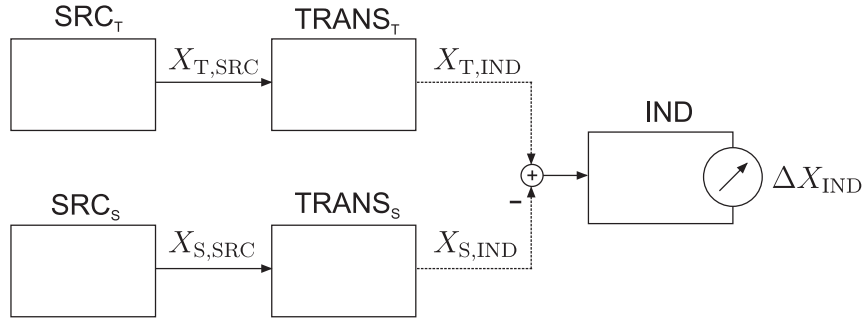


Abbildung 3.7: Generische Struktur bei der Messmethode *Substitution*

direkt aus dem Blockschaltbild abgelesen werden. Die Auflösung der Gleichung nach der Größe, für die die Messunsicherheit beurteilt werden soll, führt auf das Modell der Form (3.4).

3.2.3 Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen

Nach dem Aufstellen der Modellgleichung für die betrachtete Messung muss eine Bewertung aller beteiligten Eingangsgrößen vorgenommen werden. Bei dieser Bewertung wird jeder Eingangsgröße eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zugeordnet. Dies bedeutet nicht, dass die Werte der modellierten Eingangsgrößen streuen. Hierdurch wird ausgedrückt, dass die Kenntnisse über die Eingangsgrößen unvollständig sind. Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist, dass alle Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen symmetrisch sind [63, S. 11]. Bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird in [29] zwischen statistischen Eingangsgrößen (Ermittlungsmethode A) und stochastischen Eingangsgrößen (Ermittlungsmethode B) unterschieden.

Ermittlungsmethode A

Bei der Ermittlungsmethode A wird davon ausgegangen, dass die zu bewertende Größe X im Rahmen von Wiederholmessungen insgesamt K mal gemessen wurde. Der beste Schätzwert \bar{x} für ihren Erwartungswert $E\{X\}$ ergibt sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x(k).$$

Für eine unendliche Anzahl an Messungen stimmen beide Werte gemäß dem Gesetz der großen Zahlen [9, S. 785] überein. Als Schätzer für die Standardabweichung $\sigma\{X\}$ wird die empirische Standardabweichung

$$s(x(1), \dots, x(K)) = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (x(k) - \bar{x})^2}$$

der K Messungen verwendet. Die Standardabweichung kennzeichnet die Streuung der gemessenen Werte um ihren Mittelwert \bar{x} . Für die Messunsicherheitsbeurteilung ist jedoch nicht die Streuung der Messwerte einer einzelnen Stichprobe von Belang, sondern die Unsicherheit die daraus resultiert, dass der Mittelwert auf Basis einer begrenzten Stichprobenmessung berechnet wird. Die Standardabweichung des Mittelwerts ist

$$u_{\bar{x}} = \frac{s(x(1), \dots, x(K))}{\sqrt{K}},$$

welche zusammen mit dem Schätzwert \bar{x} die Kenntnis über die Eingangsgröße quantitativ beschreibt. Neben diesen Kennwerten stehen keine weiteren Informationen zur Verfügung und es muss nach dem Prinzip der maximalen Entropie eine Normalverteilung zur Beschreibung der Eingangsgröße angesetzt werden.

Da bei der Bewertung einer Typ-A-Eingangsgröße der Schätzwert aufgrund einer Stichprobe mit begrenztem Umfang ermittelt wird, stimmt die Schätzung nur in einem begrenztem Ausmaß mit der Grundgesamtheit überein. Dies muss, entsprechend der Sichtweise der Häufigkeitsstatistik, bei der Beurteilung der Eingangsunsicherheit berücksichtigt werden, indem für jede Typ-A-Eingangsgröße X die Anzahl der Freiheitsgrade angegeben wird. Der Freiheitsgrad ergibt sich aus der Anzahl der unabhängigen Messwerte. Da ein unabhängiger Messwert für die Berechnung des Mittelwerts *verbraucht* wurde, beträgt die Anzahl an Freiheitsgraden

$$\nu_{\bar{x}} := K - 1.$$

Ermittlungsmethode B

In der Praxis stehen häufig keine Messwerte für die zu bewertende Eingangsgröße zur Verfügung, da die Aufnahme einer Messreihe mit den zur Verfügung stehenden Ressourcen nicht oder nicht hinreichend genau oder nicht hinreichend oft durchgeführt werden kann. Daher bietet das GUM-Verfahren die Möglichkeit, Eingangsgrößen durch eine a priori-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu beschreiben, die auf Basis von Expertenwissen aufgestellt wird. Dieses Expertenwissen besteht in der Regel aus der Kenntnis

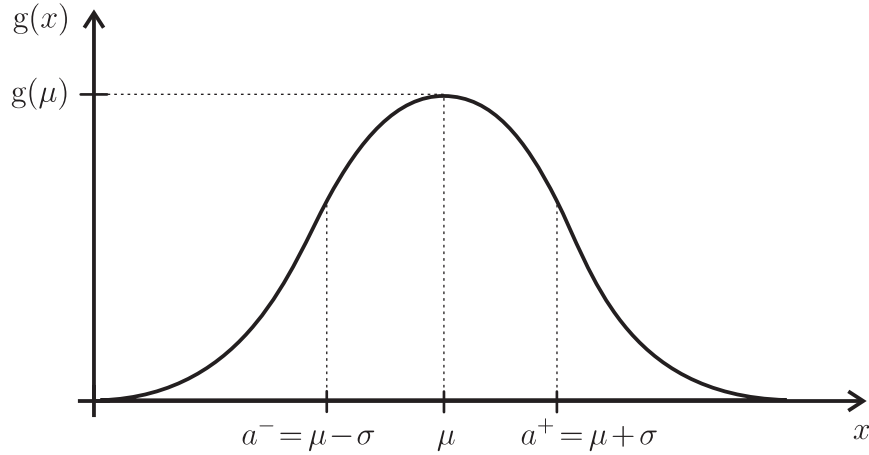


Abbildung 3.8: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung

früherer Messungen, Herstellerangaben, Kalibrierscheine, Referenzdaten aus der Literatur oder begründeten Annahmen, die von einer mit dem Messaufbau vertrauten Person getroffen werden. Das Fehlen von Stichprobenmessungen und die Abschätzung einer Eingangsgröße durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darf nicht als Notlösung angesehen werden. Die Typ-B-Beurteilung ist gleichwertig zur statistischen Methode und drückt ebenfalls die Unvollkommenheit der vorhanden Kenntnisse über die Messung aus [29, S. 18].

Entsprechend dem Prinzip der maximalen Entropie wird eine Normalverteilung (Abbildung 3.8) angesetzt, falls kein Wert ausgeschlossen werden, ein bestimmter Wertebereich jedoch als wahrscheinlich angesehen werden kann. Die Normalverteilung der Größe X wird durch ihren Erwartungswert

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

und ihre Varianz

$$\text{VAR}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

charakterisiert [103, S. 299-301]. Bei der Beurteilung der Eingangsunsicherheit wird die Funktion mit dem besten Schätzwert \bar{x} und der Standardmessunsicherheit $u_{\bar{x}}$ parametrisiert. Durch die Symmetrieeigenschaft der Normalverteilung wird der Eingangsgröße damit ein Intervall mit den Grenzen $a^- = \bar{x} - u_{\bar{x}}$ und $a^+ = \bar{x} + u_{\bar{x}}$ beigeordnet.

Wenn der Wert der Eingangsgröße durch eine untere und eine obere Schranke lokalisiert werden kann, jedoch keine weitere Information vorliegt, ist nach dem Prinzip der maximalen Entropie die Gleichverteilung anzusetzen [69]. Dies ist beispielsweise bei

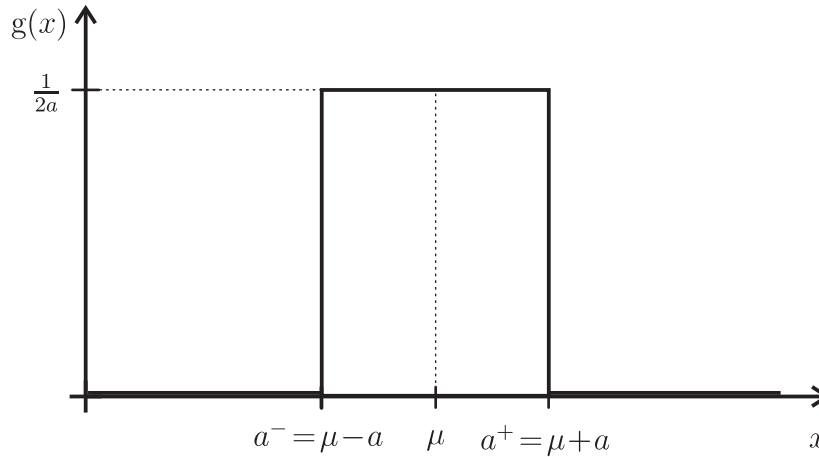


Abbildung 3.9: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Gleichverteilung

der in den Spezifikationen eines Messgeräts angegebenen maximalen Messabweichung der Fall, wie sie in [Abbildung 3.9](#) dargestellt ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Gleichverteilung mit Halbwerte a ist nach [\[103, S. 242-243\]](#) eine Rechteckfunktion mit dem Erwartungswert

$$E\{X\} = \int_{-(\mu-a)}^{(\mu+a)} x \frac{1}{2a} dx = \mu$$

und der Varianz

$$\text{VAR}\{X\} = \int_{-(\mu-a)}^{(\mu+a)} (x - \mu)^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{a^2}{3}.$$

Der Bereich für den möglichen Größenwert wird durch eine untere Schranke $a^- = \bar{x} - u_{\bar{x}}$ und eine obere Schranke $a^+ = \bar{x} + u_{\bar{x}}$ bestimmt.

Prinzipiell können weitere Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen herangezogen werden, wie z. B. die Dreiecksverteilung oder die Trapezverteilung. Diese werden für die folgende Messunsicherheitsbetrachtung jedoch nicht benötigt, sodass an dieser Stelle nicht auf weitere Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen eingegangen, sondern auf [\[29\]](#) verwiesen wird.

Jeder Typ-B-Eingangsgröße muss zur einheitlichen Behandlung aller Eingangsgrößen ebenfalls eine Anzahl an Freiheitsgraden zugewiesen werden. Da die Typ-B-Beurteilung jedoch nicht auf Messwerten mit einem bestimmten Stichprobenumfang beruht, stellt sich die Frage wie die Anzahl an Freiheitsgraden sinnvoll gewählt werden kann. Einen Anhaltspunkt liefert hier die Tatsache, dass die Standardmessunsicherheit der Ein-

gangsgröße im Zweifel zu überschätzen statt zu unterschätzen ist. Falls dieses Prinzip beachtet wird, ist es sinnvoll die Anzahl an Freiheitsgrade auf

$$\nu_{\bar{x}} := \infty$$

zu setzen [129].

3.2.4 Schritt IV: Berechnung des besten Schätzwerts und der kombinierten Standardmessunsicherheit

In Schritt IV werden die Kenntnisse über die Eingangsgrößen in Form der besten Schätzwerte und ihrer Standardmessunsicherheiten mit Hilfe des Messmodells auf die Messgrößen fortgepflanzt. Die Berechnung des besten Schätzwerts

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_R)$$

für die Messgröße \mathbf{Y} lässt sich durch das Einsetzen der besten Schätzwerte für die Eingangsgrößen in die Messfunktion (3.6) leicht bewerkstelligen.

Die Ermittlung der kombinierten Standardmessunsicherheit wird im Folgenden zunächst für unkorrelierte Eingangsgrößen betrachtet. Anschließend wird das beschriebene Vorgehen auf korrelierte Eingangsgrößen sowie auf MIMO-Messmodelle erweitert.

Unkorrelierte Eingangsgrößen

Bei der Messunsicherheitsbeurteilung liegt zwischen zwei Eingangsgrößen keine Korrelation vor, falls mindestens eine der beiden Eingangsgrößen eine definierte Konstante ist oder sich ihre Beurteilungen auf disjunkte Kenntnismengen stützen.

Die Standardmessunsicherheiten der Eingangsgrößen werden mit Hilfe des Gaußschen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes zum Quadrat der Standardmessunsicherheit der Messgröße

$$u_{\bar{y}}^2 = \sum_{r=1}^R \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_r} \right)^2 u_{\bar{x}_r}^2 = \sum_{r=1}^R \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_r} u_{\bar{x}_r}^2 \right)^2 \quad (3.7)$$

kombiniert, wobei $\partial f / \partial \bar{x}_r$ eine verkürzte Schreibweise für $\partial f(X_1, \dots, X_R) / \partial X_r$ ausgewertet für den besten Schätzwert \bar{x} ist. Dieses Gesetz stellt den Kern des Standard-GUM-Verfahrens dar. Hierdurch wird das explizite und numerisch komplexe Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messgröße vermieden, was den wichtigsten

Aspekt des Verfahrens bzgl. der Praxistauglichkeit darstellt. Der Preis für die Nutzung dieses Gesetzes ist, dass die sich aus einer Taylorreihenlinearisierung ergebende Gleichung 3.7 im Falle einer nichtlinearen Messfunktion f nur näherungsweise gilt und ggf. weitere Glieder der Taylor-Reihe berücksichtigt werden müssen ([29, S. 25]). Zudem bleibt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zur konkreteren Charakterisierung des Messergebnisses unbestimmt. Die partielle Ableitung der Messfunktion nach X_r führt auf den zu X_r gehörigen Sensitivitätskoeffizienten

$$c_r = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_r}, \quad (3.8)$$

der beschreibt, wie stark sich die Unsicherheit der Eingangsgrößen auf die Kenntnis der Messgröße auswirkt.

Korrelierte Eingangsgrößen

Es liegen korrelierte Eingangsgrößen vor, falls zwei oder mehrere Eingangsgrößen der Modellgleichung signifikant voneinander abhängig sind [29, S. 25,27]. Beispiele hierfür sind die Verwendung desselben Messgeräts für deren Bestimmung oder die gemeinsame Abhängigkeit der Eingangsgrößen von der Umgebungstemperatur. Korrelationen dürfen nur dann vernachlässigt werden, falls der Unsicherheitsbeitrag korrelierter Eingangsgrößen klein im Verhältnis zu den Unsicherheitsbeiträgen anderer Eingangsgrößen ist.

Schätzung der Kovarianzen. Bei der Ermittlungsmethode Typ-A werden die Kovarianzen der besten Schätzwerte \bar{x}_r und \bar{x}_l für die gemessenen Größen X_r und X_l mittels des Ausdrucks

$$u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} = \frac{1}{K(K-1)} \sum_{k=1}^K (x_r(k) - \bar{x}_r)(x_l(k) - \bar{x}_l) \quad (3.9)$$

bestimmt [29, S. 28]. Bei der Ermittlungsmethode Typ-B werden die Kovarianzen zweier Größen X_r und X_l auf Basis von Unsicherheiten der Größen geschätzt, die beide Eingangsgrößen beeinflussen. Angenommen es existieren Ω viele Größen Q_ω , die sich auf beide betrachteten Eingangsgrößen auswirken und mit den Unsicherheiten $u_{\bar{q}_\omega}$ behaftet sind. Dann gilt für die korrelierten Eingangsgrößen der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} X_r &= g(Q_1, \dots, Q_\Omega, Q_{r_1}, \dots, Q_{r_\Omega}), \\ X_l &= h(Q_1, \dots, Q_\Omega, Q_{l_1}, \dots, Q_{l_\Omega}), \end{aligned}$$

wobei g und h beliebige Funktionen sind. Die quadratischen Standardmessunsicherheiten der korrelierten Größen ergeben sich zu

$$u_{\bar{x}_r}^2 = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \bar{q}_\omega} u_{\bar{q}_\omega}^2 + \sum_{\omega=r_1}^{r_\Omega} \frac{\partial g}{\partial \bar{q}_\omega} u_{\bar{q}_\omega}^2 \quad \text{bzw.} \quad u_{\bar{x}_l}^2 = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \frac{\partial h}{\partial \bar{q}_\omega} u_{\bar{q}_\omega}^2 + \sum_{\omega=l_1}^{l_\Omega} \frac{\partial h}{\partial \bar{q}_\omega} u_{\bar{q}_\omega}^2.$$

Die Kovarianz der besten Schätzwerte \bar{x}_r und \bar{x}_l wird dann mit dem Ausdruck

$$u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \bar{q}_\omega} \frac{\partial h}{\partial \bar{q}_\omega} u_{\bar{q}_\omega}^2 \quad (3.10)$$

ermittelt [29, S. 60]. Die Berücksichtigung von Korrelationen bei der Messunsicherheitsbeurteilung lässt sich dadurch vermeiden, das die auf die korrelierten Eingangsgrößen wirkenden gemeinsamen Einflüsse Q_ω selbst als unabhängige Eingangsgrößen modelliert werden.

Der Korrelationskoeffizient

$$r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} = r_{\bar{x}_l, \bar{x}_r} := \frac{u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l}}{u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_l}}, \quad r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} \in [-1; 1]. \quad (3.11)$$

ist ein Maß für die relative gegenseitige Abhängigkeit zweier Größen. Durch die Normierung ist der Korrelationskoeffizient nicht mehr von der Größenordnung der betrachteten Eingangsgrößen abhängig, sondern auf das Intervall $[-1; 1]$ beschränkt. Somit kann das Ausmaß der Korrelation direkt an dem Wert des Korrelationskoeffizienten abgelesen werden.

Zusammenfassend können die Varianzen und Kovarianzen in einer Unsicherheitsmatrix

$$\mathbf{U}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} u_{\bar{x}_1}^2 & u_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} & \cdots & u_{\bar{x}_1, \bar{x}_R} \\ u_{\bar{x}_2, \bar{x}_1} & u_{\bar{x}_2}^2 & \cdots & u_{\bar{x}_2, \bar{x}_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\bar{x}_R, \bar{x}_1} & u_{\bar{x}_R, \bar{x}_2} & \cdots & u_{\bar{x}_R}^2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Diese Matrizenschreibweise erleichtert die Darstellung bei Modellen mit mehreren Messgrößen.

Bei vorliegender Korrelation muss das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (3.7) um einen Korrelationsterm erweitert werden:

$$\begin{aligned}
 u_{\bar{y}}^2 &= \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^R \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_l} u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} \\
 &= \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^R c_r c_l r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_l} \\
 &= \sum_{r=1}^R c_r c_1 r_{\bar{x}_r, \bar{x}_1} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_1} + c_r c_2 r_{\bar{x}_r, \bar{x}_2} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_2} + c_r c_3 r_{\bar{x}_r, \bar{x}_3} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_3} + \dots \\
 &= (c_1 c_1 r_{\bar{x}_1, \bar{x}_1} u_{\bar{x}_1} u_{\bar{x}_1} + c_1 c_2 r_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} u_{\bar{x}_1} u_{\bar{x}_2} + c_1 c_3 r_{\bar{x}_1, \bar{x}_3} u_{\bar{x}_1} u_{\bar{x}_3} + \dots) \\
 &\quad + (c_2 c_1 r_{\bar{x}_2, \bar{x}_1} u_{\bar{x}_2} u_{\bar{x}_1} + c_2 c_2 r_{\bar{x}_2, \bar{x}_2} u_{\bar{x}_2} u_{\bar{x}_2} + c_2 c_3 r_{\bar{x}_2, \bar{x}_3} u_{\bar{x}_2} u_{\bar{x}_3} + \dots) \\
 &\quad + (c_3 c_1 r_{\bar{x}_3, \bar{x}_1} u_{\bar{x}_3} u_{\bar{x}_1} + c_3 c_2 r_{\bar{x}_3, \bar{x}_2} u_{\bar{x}_3} u_{\bar{x}_2} + c_3 c_3 r_{\bar{x}_3, \bar{x}_3} u_{\bar{x}_3} u_{\bar{x}_3} + \dots) \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

Die Terme, die die Autokorrelation beschreiben, können aus der Doppelsumme herausgezogen werden. Des Weiteren sind die Werte der symmetrischen angeordneten Summanden identisch, sodass

$$u_{\bar{y}}^2 = \sum_{r=1}^R c_r^2 u_{\bar{x}_r}^2 + 2 \sum_{r=1}^{R-1} \sum_{l=r+1}^R c_r c_l r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_l}. \quad (3.12)$$

geschrieben werden kann. Die Korrelation von Eingangsgrößen führt zu einer Zunahme der Messunsicherheit, falls die korrelierten Eingangsgrößen als Summe oder Produkt in der Messfunktion auftauchen. Sind die korrelierten Eingangsgrößen über eine Subtraktion oder Division in der Messfunktion verknüpft, führt dies zu einer Verringerung der Messunsicherheit, da in diesem Fall ein negatives Vorzeichen durch die Sensitivitätskoeffizienten eingeführt wird [120].

Unsicherheitsfortpflanzung bei einer vektoriellen Messgröße

Die bei der Betrachtung zweier Messgrößen Y_m und Y_w auftretenden Messunsicherheiten und Kovarianzen werden mit

$$\begin{aligned}
 u_{\bar{y}_m}^2 &= \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^R \frac{\partial f_m}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial f_m}{\partial \bar{x}_l} u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} \\
 &= \sum_{r=1}^R c_{m,r}^2 u_{\bar{x}_r}^2 + 2 \sum_{r=1}^{R-1} \sum_{l=r+1}^R c_{m,r} c_{m,l} u_{\bar{x}_r, \bar{x}_l}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$u_{\bar{y}_m, \bar{y}_w} = \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^R \frac{\partial f_m}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{x}_l} r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_l} \quad (3.13)$$

berechnet [119] [29, S. 81]. Gleichung (3.13) ist eine Verallgemeinerung der oben genannten Gleichung (3.10) für den Fall, dass die Eingangsgrößen korreliert sind. Der in Gleichung (3.13) verwendete Korrelationskoeffizient wird mittels Gleichung (3.11) berechnet. Das Ausmaß der Korrelation wird durch den Korrelationskoeffizienten

$$r_{\bar{y}_m, \bar{y}_w} = \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^R c_{m,r} c_{w,l} r_{\bar{x}_r, \bar{x}_l} \frac{u_{\bar{x}_r} u_{\bar{x}_l}}{u_{\bar{y}_m} u_{\bar{y}_w}}$$

ausgedrückt, der sich direkt aus der Anwendung der Gleichungen (3.11) und (3.13) ergibt.

Die Berechnung der Unsicherheitsmatrix der Messgrößen kann mit Hilfe der Matrizen-schreibweise

$$\mathbf{U}_{\bar{y}} = \mathbf{C} \mathbf{U}_{\bar{x}} \mathbf{C}^T \quad (3.14)$$

in kompakterer Form dargestellt werden. Hierbei stellt \mathbf{C} eine (M,R)-Matrix dar, deren Elemente durch

$$c_{m,r} = \frac{\partial f_m}{\partial \bar{x}_r}, \quad m = 1, \dots, M \quad (3.15)$$

gegeben sind. Die Sensitivitätsmatrix \mathbf{C} ist somit identisch zur Jacobi-Matrix der Vektorfunktion \mathbf{f} aus Gleichung (3.6), welche für die besten Schätzwerte der Eingangsgrößen ausgewertet wurde. Für die Herleitung des allgemeinen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes (3.14) wird an dieser Stelle auf Anhang A verwiesen.

Kombinierte Standardmessunsicherheit

Die *kombinierte Standardmessunsicherheit*

$$u_{\bar{y}_m} = \sqrt{u_{\bar{y}_m}^2}.$$

ergibt sich unmittelbar aus den Diagonalelementen der Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{y}}$. Es kann sinnvoll sein, die ermittelte kombinierte Standardmessunsicherheit auf den besten Schätzwert der Messgröße zu beziehen:

$$u_{\text{rel}, \bar{y}} = \frac{u_{\bar{y}}}{|\bar{y}|}, \quad |\bar{y}| \neq 0.$$

Dies bietet sich vor allem dann an, wenn die Messunsicherheitsanforderungen an den Messwert gekoppelt sind und sich dieser über einen großen Bereich erstreckt.

3.2.5 Schritt V: Ermittlung der erweiterten Unsicherheit

Die in Schritt IV des Verfahrens ermittelte kombinierte Standardmessunsicherheit $u_{\bar{y}}$ charakterisiert die Unsicherheit des Messergebnisses vollständig. Allerdings besteht in der Praxis häufig die Anforderung eine Messunsicherheit anzugeben, welche eine bestimmte Überdeckungswahrscheinlichkeit spezifiziert. Die Überdeckungswahrscheinlichkeit quantifiziert das Maß an Vertrauen in die Aussage, dass der Wert der Messgröße innerhalb eines angegebenen Unsicherheitsintervalls liegt. Typische Werte für solche Überdeckungswahrscheinlichkeiten sind neben 68,27% für die Standardmessunsicherheit auch 95,45% und 99,73%, welche aus der Annahme einer Normalverteilung resultieren. In den Ingenieurwissenschaften ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95% üblich. Die ist jedoch nicht standardisiert, sodass die Überdeckungswahrscheinlichkeit im Einzelfall explizit genannt werden muss.

Die *erweiterte Messunsicherheit*

$$U_{\bar{y}} := k_P u_{\bar{y}}$$

besteht aus der kombinierten Standardmessunsicherheit und einem *Erweiterungsfaktor* k_P . Der Index P des Erweiterungsfaktors bezeichnet die gewählte Überdeckungswahrscheinlichkeit. Die erweiterte Messunsicherheit enthält keine neuen Informationen und kann durch die Wahl der Überdeckungswahrscheinlichkeit beliebig variiert werden, obwohl sich an den vorliegenden Kenntnissen über die Messgröße nichts geändert hat [153]. Der Erweiterungsfaktor wird durch die Verteilungsfunktion der Messgröße bestimmt. Beim GUM-Verfahren wird auf die explizite Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Messgröße verzichtet, was ohnehin nur in seltenen Fällen analytisch exakt durchgeführt werden kann. Es werden lediglich die besten Schätzwerte der Eingangsgrößen und die Standardmessunsicherheiten fortgepflanzt, nicht jedoch die Form der Verteilungen. Diese Problematik wird im Leitfaden auf unterschiedliche Weise angegangen. In der jüngsten Ergänzung des Leitfadens [67] wird grundsätzlich unter Berufung auf das Prinzip der maximalen Informationsentropie eine Normalverteilung für die Kenntnisse über die Messgröße angesetzt. Im ursprünglichen Dokument [29] wird eine Normalverteilung bzw. eine t-Verteilung angesetzt, was mit Satz 1 begründet wird.

Satz 1 Zentraler Grenzwertsatz (nach [9, S. 785]): Seien X_1, \dots, X_R unabhängige stochastische Größen mit den jeweiligen Erwartungswerten μ_r und den Varianzen σ_r . Dann strebt die Verteilungsfunktion der Größe

$$Y = \frac{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R X_r - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{R}}$$

für $R \rightarrow \infty$ gegen die Standardnormalverteilung $N(0,1)$.

Dabei nähert die Verteilungsfunktion der Messgröße die Normalverteilung umso besser an, je mehr Eingangsgrößen vorliegen, je näher die einzelnen Unsicherheitsbeiträge beieinander liegen, je geringer die Korrelation zwischen den linearkombinierten Eingangsgrößen X_r ist und je besser die einzelnen Verteilungsfunktionen der Eingangsgrößen mit der Normalverteilung übereinstimmen [29, S. 74].

Bestimmung des Erweiterungsfaktors für eine skalare Messgröße

Unabhängig davon wie die Annahme einer Normalverteilung begründet wird, ergeben sich die Erweiterungsfaktoren entsprechend Tabelle 3.1. Bei der Normalverteilung er-

Überdeckungswahrscheinlichkeit P in %	Erweiterungsfaktor k_P
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Tabelle 3.1: Übersicht über die wichtigsten Erweiterungsfaktoren bei vorliegender Normalverteilung

gibt sich für die Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45% ein Erweiterungsfaktor von $k_{95,45\%} = 2$. In der Praxis wird die erweiterte Messunsicherheit vereinfachend mit einem Erweiterungsfaktor von $k_P = 2$ berechnet und dafür eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95% angegeben [121]. Korrekterweise müsste an dieser Stelle der Erweiterungsfaktor von $k_{95\%} = 1,96$ verwendet werden. Diese Unschärfe ist jedoch in Anbetracht der Schwierigkeiten bei der Modellierung, der Bewertung der Eingangsgrößen und der Unsicherheit der Verteilungsfunktion der Messgröße vernachlässigbar.

Bestimmung des Erweiterungsfaktors für eine skalare Messgröße bei beschränkter Freiheit

Falls die Standardmessunsicherheit der Messgröße durch die Standardunsicherheit einer Typ-A-Eingangsgröße dominiert wird, wird in [29] eine Vergrößerung der erweiterten Messunsicherheit empfohlen. Die Häufigkeitsverteilung der dominierenden Eingangsgröße spiegelt nicht in vollem Maße die Grundgesamtheit wieder. Die durch eine Stichprobe geschätzten Kennwerte einer Größe unterliegen einer Verteilung, welche für eine Stichprobe mit unendlichem Umfang gegen die Normalverteilung konvergiert. Die Verteilung, die diese Eigenschaft aufweist, heißt t-Verteilung. Die t-Verteilung schätzt die Kenntnisse über die Messgröße auf Basis der Anzahl an effektiven Freiheitsgraden der Messgröße $\nu_{\text{eff},\bar{y}}$ ab [29, S. 47]. Die Anzahl an effektiven Freiheitsgraden ist ein Maß dafür, wie gut der vollständig oder zum Teil aus Stichproben gewonnene Schätzwert mit dem Erwartungswert der Grundgesamtheit übereinstimmt. Der effektive Freiheitsgrad ν_{eff} lässt sich mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Formel [148, 105]

$$\nu_{\text{eff},\bar{y}} = \frac{u_{\bar{y}}^4}{\sum_{r=1}^R ((c_r^2 u_{\bar{x}_r}^2)^2 / \nu_{\bar{x}_r})}$$

bestimmen [29, S. 71]. Die Annäherung der t-Verteilung an die Normalverteilung in Abhängigkeit der effektiven Freiheitsgrade zeigt Abbildung 3.10. Die Abbildung verdeutlicht, dass im Vergleich zur Normalverteilung ($\nu = \infty$) bei nur wenigen Freiheitsgraden der beste Schätzwert für die Messgröße weniger wahrscheinlich ist. Dafür werden den Werten, die weit abseits des Schätzwerts liegen, höhere Wahrscheinlichkeiten zugesprochen. Daraus folgt, wie erwartet, dass bei einer dominanten Eingangsgröße, die mit nur wenigen Messwerten abgeschätzt wurde, dem besten Schätzwert eine größere Messunsicherheit beigeordnet wird. Der Wert des für die gewählte Überdeckungswahrscheinlichkeit zu bestimmenden Erweiterungsfaktors t_P wird numerisch oder mittels Wertetabellen aus der Literatur ermittelt. Der t-Faktor unterscheidet sich ab $\nu_{\text{eff},\bar{y}} = 50$ um weniger als 5% vom Erweiterungsfaktor der Normalverteilung, womit der Unterschied zwischen Normal- und t-Verteilung in diesem Fall vernachlässigt werden kann.

Bestimmung des Erweiterungsfaktors für eine vektorielle Messgröße

Bei mehreren Messgrößen muss ihre gegenseitige Korrelation bei der Bestimmung des Erweiterungsfaktors berücksichtigt werden. Hierzu wird entsprechend dem zentralen Grenzwertsatz 1 bzw. dem Prinzip der maximalen Entropie die multivariate Normalverteilung

$$g_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}^{-1}(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})}$$

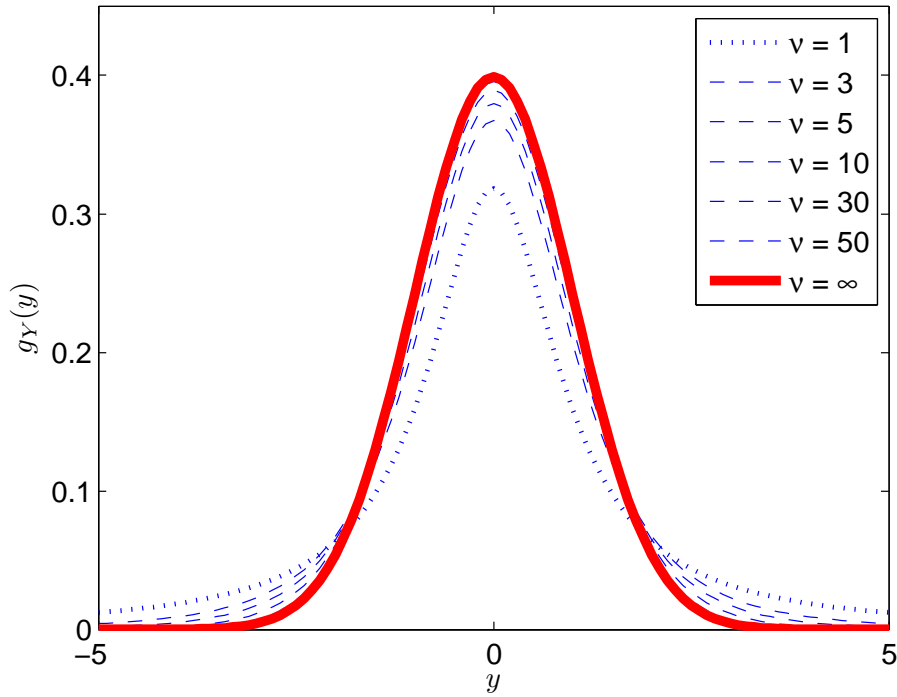


Abbildung 3.10: Parameterabhängige Annäherung der t-Verteilung an die Normalverteilung

angesetzt, die durch den besten Schätzwert $\bar{\mathbf{y}}$ und die beigeordnete Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}$ parametrisiert wird [67, S. 7]. Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeitsdichte konstant, falls der quadratische Ausdruck im Exponenten konstant ist. Die Messwerte für die M Messgrößen, die die Gleichung

$$(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = k_P^2 = \text{const} \quad (3.16)$$

erfüllen, weisen eine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte auf und beschreiben ein M-dimensionales Hyperellipsoid. Dieses Hyperellipsoid begrenzt den zur Überdeckungswahrscheinlichkeit P korrespondierenden Überdeckungsbereich. Sein Mittelpunkt wird durch den besten Schätzwert $\bar{\mathbf{y}}$ und seine Form und Lage durch die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}$ festgelegt. Seine Ausdehnung wird durch den zu bestimmenden Erweiterungsfaktor k_P gekennzeichnet. Der quadratische Ausdruck in Gleichung (3.16) folgt unter der nach wie vor getroffenen Annahme einer multivarianten Normalverteilung einer χ^2 -Verteilung mit M vielen Freiheitsgraden [67, S. 22]. Der Erweiterungsfaktor wird so gewählt, dass

$$P = \text{Prob}(\chi_M^2 \leq k_P^2)$$

erfüllt ist. Durch diese Wahl entspricht das Vertrauen in die Aussage, dass ein Wert \mathbf{y} aus dem Inneren des Hyperellipsoids den Wert der Messgröße repräsentiert, der Wahr-

scheinlichkeit P . Abbildung 3.11 zeigt beispielhaft den 95%-Überdeckungsbereich bei zwei miteinander korrelierten Messgrößen. Die Wertepaare mit konstanter Wahr-

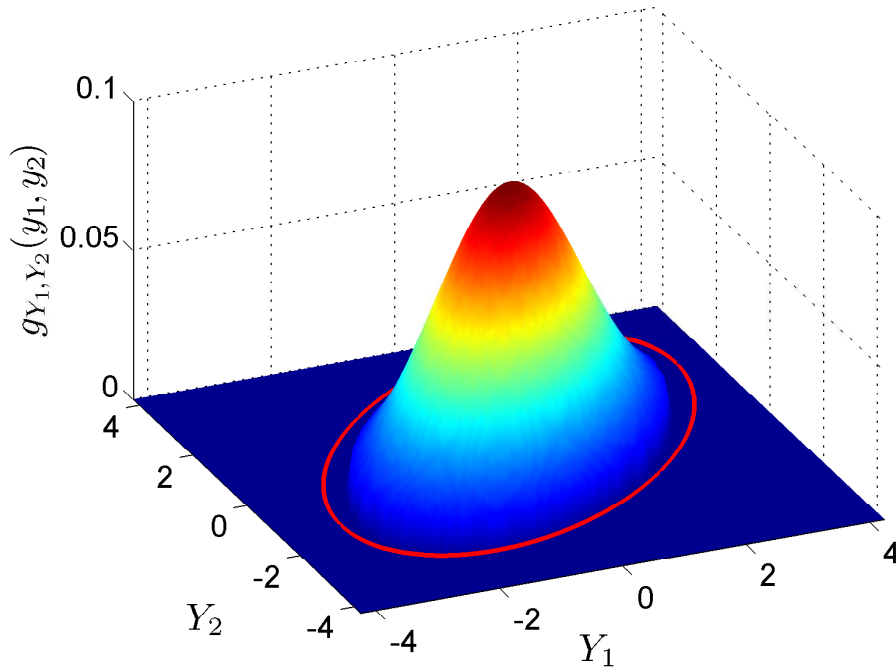


Abbildung 3.11: Beispielhafte Darstellung des 95%-Überdeckungsbereichs einer zweidimensionalen Messgröße

lichkeitsdichte bei $P = 95\%$ sind durch die rote Ellipse – die Grenze des durch die Ellipsengleichung (3.16) beschriebenen Überdeckungsbereichs – gekennzeichnet.

3.2.6 Schritt VI: Angabe des vollständigen Messergebnisses

Bei einer skalaren Messgröße lautet das Ergebnis der Messung

$$Y = \bar{y} \pm U_{\bar{y}}, \quad U_{\bar{y}} = k p u_{\bar{y}}. \quad (3.17)$$

Gleichung (3.17) beschreibt das Intervall

$$\bar{y} - U_{\bar{y}} \leq Y \leq \bar{y} + U_{\bar{y}},$$

von dem erwartet werden kann, dass es den festgelegten Anteil P der Verteilung von Werten umfasst, die der Messgröße Y vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Bei einer vektoriellen Messgröße besteht das vollständige Messergebnis analog aus dem besten Schätzwert $\bar{\mathbf{y}}$, der der Messgröße beigeordneten Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}$ sowie dem berechneten Erweiterungsfaktor k_P und dessen Berechnungsmethode. Der Erweiterungsfaktor charakterisiert ein Hyperellipsoid der Dimension M , aus dem ein Wert \mathbf{y} der vektoriellen Messgröße \mathbf{Y} mit einem Grad an Vertrauen von P zugeordnet werden kann. Die in \mathbf{Y} enthaltenen einzelnen Messgrößen dürfen aufgrund ihrer Korrelation nicht unabhängig voneinander behandelt werden.

Bemerkung 1 *Eine kleiner Wert für die Unsicherheit ist kein sicherer Indikator für eine hochgenaue Messung. Beispielsweise kann eine Messung mit geringer Messunsicherheit dennoch ungenau sein, wenn signifikante Einflüsse nicht berücksichtigt oder deren Unsicherheiten zu günstig eingeschätzt wurden. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass eine große Messunsicherheit nicht zwangsläufig durch ein, im Vergleich zu anderen Messverfahren, ungenaues Messverfahren hervorgerufen wird. Ein großer Wert für die Messunsicherheit kann vielmehr in einer umfassenden Berücksichtigung aller relevanten Einflüsse begründet sein. Eine zu groß erscheinende Messunsicherheit sollte nicht dazu führen, dass die entsprechende Beurteilung verworfen wird, wie es in der Praxis häufig geschieht [70]. Grundsätzlich steigert die Angabe einer – wenn auch hohen – Messunsicherheit die Qualität und Aussagekraft des Messergebnisses, da hierdurch das Vertrauen in das Messergebnis erhöht wird.*

Bemerkung 2 *Insbesondere im Hinblick auf sicherheitsrelevante Anwendungen darf der intuitiven Neigung, die beurteilte Messunsicherheit „zur Sicherheit“ noch etwas zu vergrößern, nicht nachgegangen werden. Dies wäre in keinster Weise zu rechtfertigen, da die Messunsicherheit durch die vorliegenden Kenntnisse eindeutig festgelegt ist. Eine Unsicherheit bei der Unsicherheitsbeurteilung existiert nicht. Ebenso ist eine übertrieben konservativ abgeschätzte Messunsicherheit nicht zweckmäßig. Die in der Messunsicherheitsbeurteilung dargelegten Kenntnisse müssen sich im Experiment bewähren, d. h. falsifizierbar sein. Dies ist bei einer unvernünftig groß beurteilten Messunsicherheit jedoch kaum möglich, da die erlangten Messwerte in diesem Fall nie außerhalb des Überdeckungsbereichs liegen.*

3.2.7 Zusammenfassung des Verfahrens

Abbildung 3.12 (nach [63, S. 12]) fasst das Vorgehen zur Beurteilung der Messunsicherheit zusammen. Es kann konstatiert werden, dass die wesentliche Herausforderung in der Durchführung der ersten Phase des Verfahrens – vor allem in der Aufstellung eines Messmodells und der Beurteilung der Eingangsgrößen – besteht. Hieraus resultieren

die Messfunktion f , die besten Schätzwerte \bar{x} sowie die den Eingangsgrößen beigeordneten Standardunsicherheiten $u_{\bar{x}_r}$. In Abhängigkeit der genutzten Ermittlungsmethode ergibt sich für jede Eingangsgröße die Anzahl an Freiheitsgraden $\nu_{\bar{x}_r}$. Zusätzlich wird ein gewisser Grad an Vertrauen P an das Messergebnis gefordert.

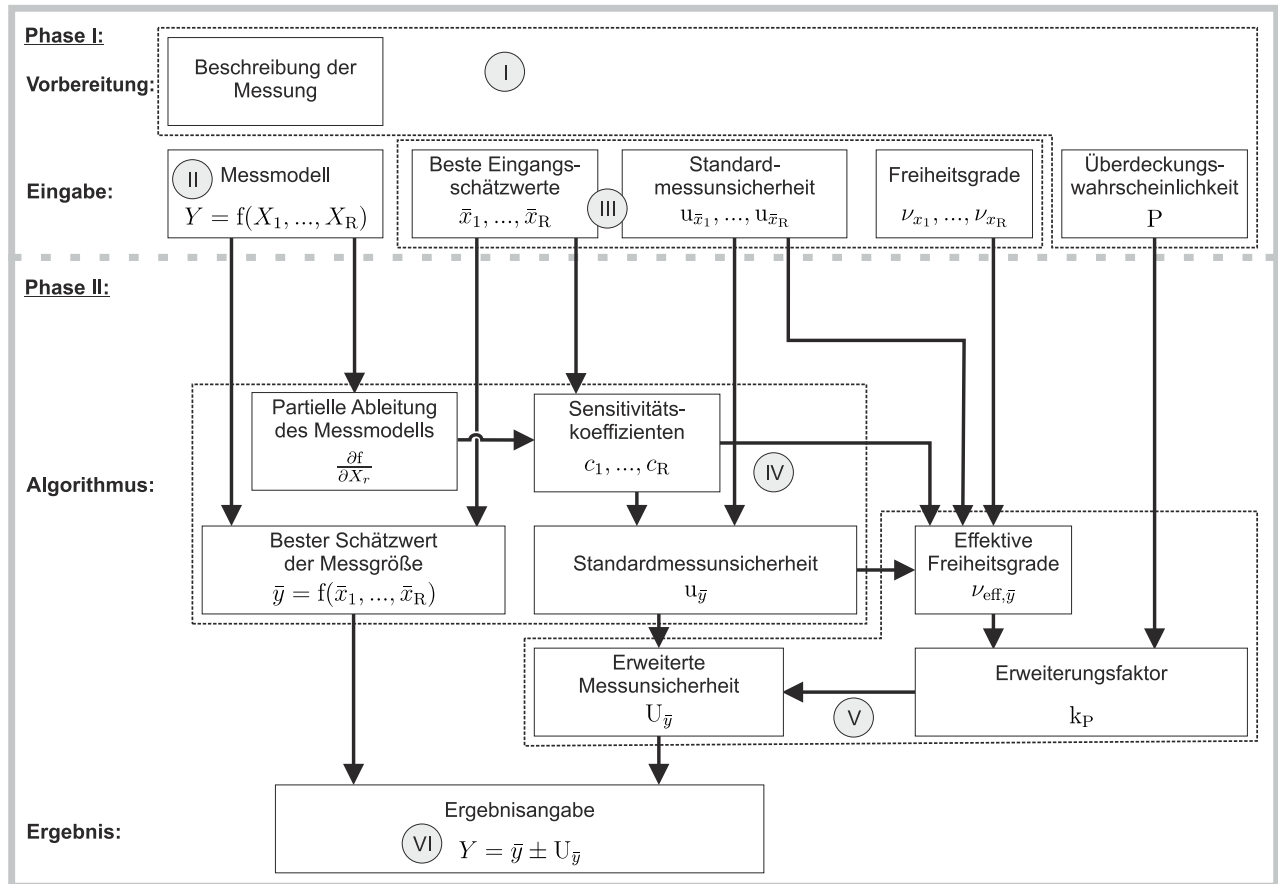


Abbildung 3.12: Zusammenfassende Darstellung des Standard-GUM-Verfahrens für eine Messgröße unter Vernachlässigung von Korrelationen

In Phase I werden die Kenntnisse über die Messung mittels Stichproben, Abschätzungen und Expertenwissen dargelegt. Die Schritte der Phase II werden einheitlich nach einem festen Algorithmus und meist durch ein Rechnerprogramm durchgeführt. Nach der möglicherweise notwendigen Linearisierung der Messfunktion und der Ermittlung der partiellen Ableitungen wird der beste Schätzwert für die Messgröße \bar{y} direkt durch das Einsetzen der Eingangsschätzwerte \bar{x} in die Messfunktion f berechnet. Aus den partiellen Ableitungen werden die Sensitivitätskoeffizienten c_r gebildet, mit denen sich die Quadrate der ermittelten Eingangsunsicherheiten $u_{\bar{x}_r}^2$ gemäß dem Unsicherheitsfort-

pflanzungsgesetz auf die Standardmessunsicherheit $u_{\bar{y}}$ der Messgröße auswirken. Mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Formel wird die Anzahl an effektiven Freiheitsgraden $\nu_{\text{eff},\bar{y}}$ berechnet, woraus sich für die geforderte Überdeckungswahrscheinlichkeit P direkt der Erweiterungsfaktor k_P bzw. t_P ergibt. Der beste Schätzwert für die Messgröße \bar{y} bildet zusammen mit der erweiterten Messunsicherheit $U_{\bar{y}}$ ein Überdeckungsintervall bzw. ein Überdeckungsbereich im vektoriellen Fall.

Interpretation von Messergebnissen

Zur Erläuterung der bei einer Messunsicherheitsbeurteilung auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sei beispielhaft eine Raumtemperaturmessung mit fiktiven Werten betrachtet, deren Resultat in Abbildung 3.13 dargestellt ist. Es sind sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messgröße unter idealen Messbedingungen als auch die zweier Messergebnisse mit begrenzten Kenntnissen bzgl. der Eingangsgrößen dargestellt. Hierbei werden zum Vergleich ein nach Ermittlungsmethode A ermitteltes Messergebnis und ein nach Ermittlungsmethode B ermitteltes Messergebnis betrachtet.

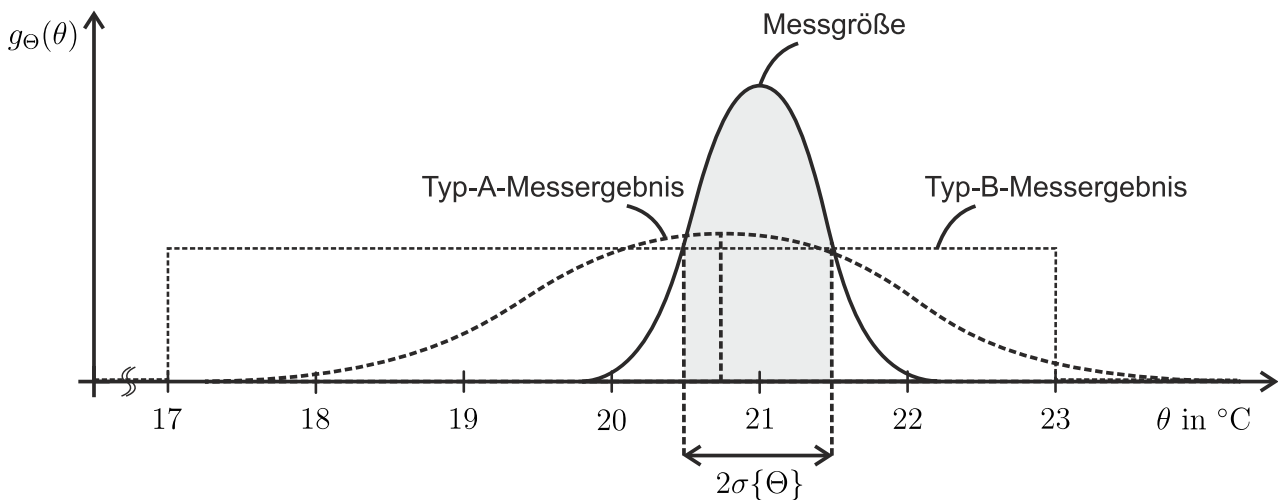


Abbildung 3.13: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Messgröße unter idealen und realen Messbedingungen

Üblicherweise wird die Messgröße als hinreichend gut definiert angenommen und kann als Dirac-Funktion modelliert werden. Im Allgemeinen muss die Kenntnis über die Messgröße aufgrund ihrer Eigenunsicherheit jedoch durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dargestellt werden. Hier ist die Messgröße dadurch unvollständig definiert, dass eine genaue Angabe darüber fehlt, *wo* im Raum die Temperatur zu messen ist. Die

Eigenunsicherheit der Messgröße sei hier durch die Standardabweichung $\sigma\{\Theta\} = 0,5\text{ °C}$ charakterisiert. Jeder der durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erlaubten Werte der Messgröße stellt einen *wahren* Wert dar. Der Erwartungswert $E\{\Theta\} = 21\text{ °C}$ stellt die mittlere Raumtemperatur dar, wobei die Temperatur an einigen Orten stark vom Erwartungswert abweichen kann. Allerdings sind auch diese stark abweichenden Werte an den jeweiligen Orten *wahr*. An dieser Stelle wird erneut deutlich, dass es für eine Messgröße nicht *den* Wert gibt, sondern eine Menge an Werten existiert. Im dargestellten Fall einer Normalverteilung existieren sogar unendlich viele *wahre* Werte!

Falls keine Messwerte über die Raumtemperatur vorhanden sind, muss die Raumtemperatur entsprechend den Erfahrungswerten abgeschätzt werden (Typ-B-Beurteilung). Nach dem Prinzip der maximalen Entropie sei die Messgröße sinnvoller Weise durch eine Gleichverteilung mit den Grenzen $\bar{\theta} = 20\text{ °C}$ und $U_{\bar{\theta}} = 3\text{ °C}$ beschrieben.

Alternativ zur konservativen Abschätzung nach Ermittlungsmethode Typ-B, können die Kenntnisse über die Messgröße erweitert werden, indem die Raumtemperatur mehrfach gemessen wird. Beispielsweise ergibt sich nach $K = 9$ Messungen ein Durchschnittswert von $\bar{\theta} = 20,75\text{ °C}$ sowie eine empirische Standardabweichung $s(\theta(1), \dots, \theta(9)) = 1,5\text{ °C}$. Die mittlere Raumtemperatur wird hierdurch mit einer Standardmessunsicherheit von $u_{\bar{\theta}} = 0,5\text{ °C}$ geschätzt. Das vollständige Messergebnis mit $P = 95\%$ lautet somit

$$\Theta = \bar{\theta} \pm U_{\bar{\theta}} = \bar{\theta} \pm 2(\sqrt{u_{\Theta}^2 + u_{\bar{\theta}}^2}) = 20,75\text{ °C} \pm 2(\sqrt{0,5^2 + 0,5^2})\text{ °C} = 20,75\text{ °C} \pm 0,7\text{ °C},$$

wobei $u_{\bar{\theta}}$ die beurteilte Eigenunsicherheit der Messgröße ist und als zusätzliche Komponente in die Messunsicherheit mit einbezogen werden muss. Die Eigenunsicherheit der Messgröße stellt die untere Schranke für die Messunsicherheit dar. Bei vernachlässigbarer Eigenunsicherheit strebt die Messunsicherheit bei einer unendlich mächtigen Kenntnismenge gegen den Wert $u_{\bar{\theta}} = 0\text{ °C}$.

Durch das vollständige Messergebnis wird das Ausmaß des Vertrauens in den Wahrheitsgehalt der Hypothese „Der Wert der Messgröße liegt in dem Intervall $\bar{\theta} \pm U_{\bar{\theta}}$.“ formuliert. Der Wert der Messgröße darf jedoch nur dann innerhalb des Intervalls vermutet werden, wenn systematische Einflüsse vernachlässigbar klein sind oder bereits korrigiert wurden, was bei dem GUM-Verfahren vorausgesetzt wird. Im Falle einer Korrektur muss die Unsicherheit der Korrektur mit in die Messunsicherheit einbezogen werden. Das Ausmaß für das Vertrauen in den Wahrheitsgehalt der Hypothese wird durch die Überdeckungswahrscheinlichkeit quantifiziert. Ein Wert von $P = 50\%$ würde bedeuten, dass der Wert der Raumtemperatur in gleichem Maße innerhalb wie außerhalb des Intervalls vermutet werden darf und die Messung bzw. Messunsicherheitsbeurteilung somit zu keinerlei Erkenntnis geführt hat. Erst bei einer sinnvollen Überdeckungswahrscheinlichkeit von $P > 50\%$ tritt eine Tendenz für die Werte im Intervall auf.

Eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von beispielsweise $P = 95\%$ ist nicht im dem Sinne zu verstehen, dass nach 100-maligem Messen wohl fünf Werte außerhalb des Intervalls liegen werden. Denn dies würde bedeuten, dass die oben genannte Hypothese mal wahr und mal falsch ist, obwohl sich an der Messgröße (θ), den vorliegenden Kenntnissen (u_{θ}) und dem geforderten Grad an Vertrauen ($P = 95\%$) nichts geändert hat. Diese fragwürdige Interpretation aus Sicht der Fehlerrechnung im Sinne relativer Häufigkeiten ist nicht sinnvoll.

3.3 Messunsicherheitsbeurteilung mittels Monte-Carlo-Simulation

Das im Abschnitt 3.2 beschriebene Standard-GUM-Verfahren lässt sich auf eine große Klasse von Messaufgaben anwenden und liefert in der Praxis meist hinreichende Aussagen über die Messunsicherheit. Das Standardverfahren setzt jedoch voraus, dass die Messfunktion durch eine Taylor-Reihe linearisierbar ist und zu einem tolerierbaren Linearisierungsfehler führt. Des Weiteren müssen die Voraussetzungen für den zentralen Grenzwertsatz erfüllt sein. Ansonsten ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße entgegen der Annahme nicht gaußförmig und der Erweiterungsfaktor k_P bzw. die erweiterte Unsicherheit wird auf Basis einer falschen Annahme bestimmt. Insbesondere bei aufwändigen Messfunktionen steigt die Komplexität beim Bilden der partiellen Ableitungen zur Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten. Zudem können selbst symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Eingangsgrößen durch nichtlineare Messmodelle auf eine unsymmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausgangsgröße führen. Dies wird durch das Standard-GUM-Verfahren nicht abgedeckt.

Für Messprozesse, die starke Nichtlinearitäten aufweisen, deren Messmodell nicht stetig differenzierbar ist oder bei denen der zentrale Grenzwertsatz nicht gilt, wurde ein alternativer Ansatz auf Basis von Monte-Carlo-Simulationen vorgeschlagen. Dieser ist im *GUM-Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method* [62] festgeschrieben worden und wird im Folgenden zusammenfassend dargestellt. Der Monte-Carlo-Ansatz kann darüber hinaus auf Messungen angewendet werden, die die Voraussetzungen des Standard-GUM-Verfahrens erfüllen, um die dabei erhaltenen Ergebnisse zu verifizieren.

Die Grundidee des Monte-Carlo-Ansatzes besteht darin, nicht die Eingangsunsicherheiten mit dem linearen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (3.12) auf die Messgröße abzubilden, sondern die zugeordneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eingangsgrößen als solche numerisch zu propagieren. Somit besteht keine Notwendigkeit für die

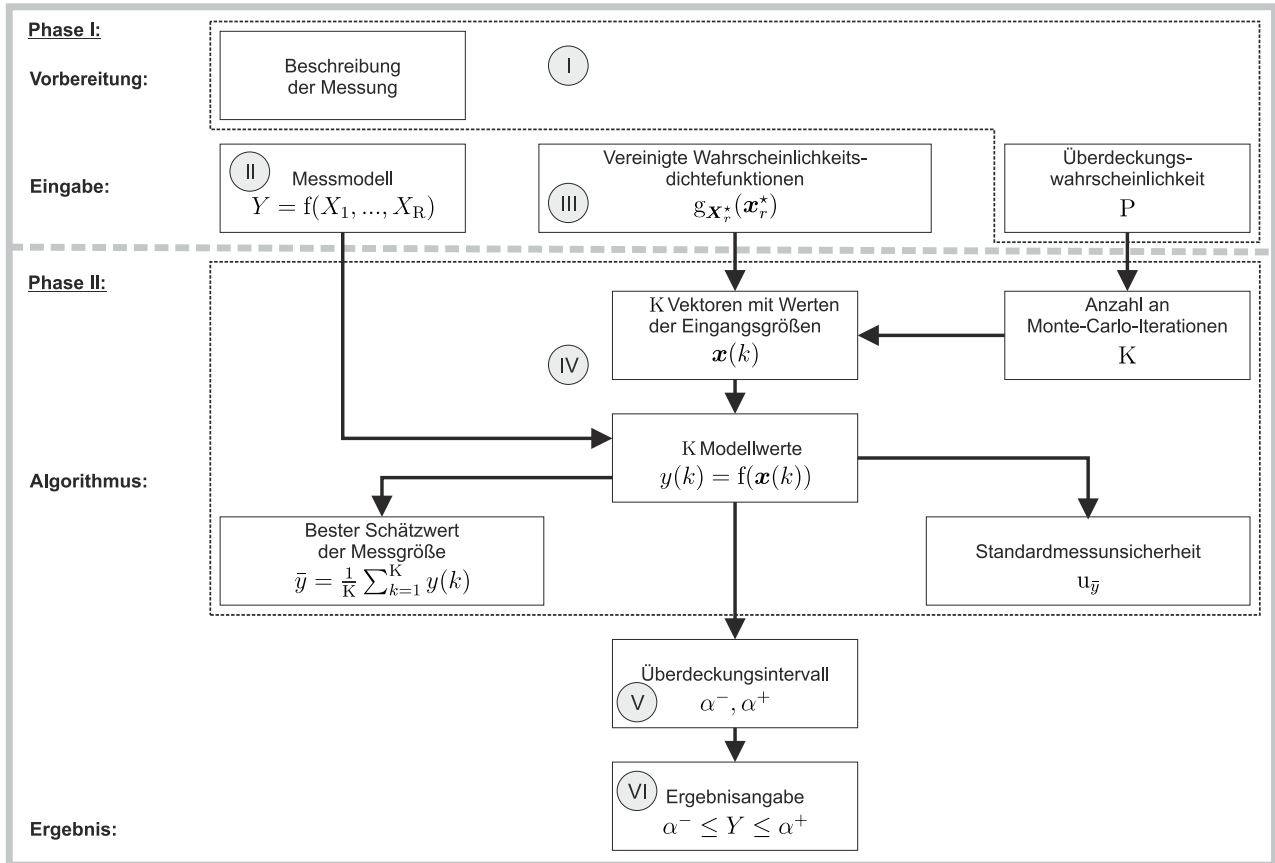


Abbildung 3.14: Zusammenfassende Darstellung des Monte-Carlo-Verfahrens

Bestimmung von Sensitivitätskoeffizienten [62, S. 17], wie die in Abbildung 3.14 (nach [62, S. 16]) dargestellte Übersicht über den Monte-Carlo-Ansatz zeigt. Ebenso muss kein Erweiterungsfaktor bestimmt werden, womit die Anzahl der Freiheitsgrade und deren Abbildung durch die Welch-Satterthwaite-Formel auf die Anzahl an effektiven Freiheitsgrade keine Rolle mehr spielt. Das Ergebnis des Monte-Carlo-Verfahrens ist eine der Messgröße beigeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Aus der möglicherweise asymmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird der Überdeckungsbereich mit der geforderten Überdeckungswahrscheinlichkeit numerisch berechnet.

3.3.1 Schritt I: Beschreibung der Messung

Zur Nachvollziehbarkeit der Messunsicherheitsbeurteilung und für die Aufstellung des Messmodells ist analog zum Standard-GUM-Verfahren eine umfassende Beschreibung der Messaufgabe notwendig. Diese umfasst ebenfalls die Definition der Messgröße, das Messprinzip, die Messmethode und das Messverfahren. Hierbei gelten weiterhin die be-

reits in Unterabschnitt 3.2.1 genannten Erläuterungen. Die geforderte Überdeckungswahrscheinlichkeit P muss ebenfalls spezifiziert werden.

3.3.2 Schritt II: Modellierung der Messung

Beim Monte-Carlo-Ansatz wird die Messung durch die Messfunktion

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_M \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_R) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_R) \\ \vdots \\ f_M(X_1, X_2, \dots, X_R) \end{pmatrix}$$

modelliert, wobei \mathbf{f} eine Vektorfunktion darstellt, welche die R Eingangsgrößen auf die M Messgrößen Y_m ($m = 1, \dots, M$) abbildet (vgl. Modell (3.6)) [67, S. 15].

3.3.3 Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen

Den unkorrelierten Eingangsgrößen werden – analog zum Standard-GUM-Verfahren – individuelle Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen als Resultat einer Typ-A oder Typ-B-Methode zugeordnet [62, S. 18]. Da die Werte der miteinander korrelierten Eingangsgrößen voneinander abhängig sind, kann deren Verteilungsdichtefunktion nicht individuell betrachtet werden. Den R^* jeweils miteinander korrelierten Eingangsgrößen wird daher eine vereinigte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_{\mathbf{X}^*}(\mathbf{x}^*)$ zugewiesen, wobei \mathbf{x}^* ein Vektor mit Werten der in \mathbf{X}^* enthaltenen und miteinander korrelierten Größen darstellt.

Falls die korrelierten Eingangsgrößen normalverteilt sind, wird ihre vereinigte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion direkt durch die multivariate Normalverteilung

$$g_{\mathbf{X}^*}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^R \det \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}^{-1} (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*)}$$

beschrieben, wobei $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}$ die Unsicherheitsmatrix und $\bar{\mathbf{x}}^*$ der beste Schätzwert für \mathbf{X}^* ist [62, S. 25]. Bei beschränkter Freiheit wird den korrelierten Eingangsgrößen die multivariate t-Verteilung

$$g_{\mathbf{X}^*}(\mathbf{x}^*) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*} + R}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}}{2})} \frac{1}{\sqrt{(\pi \nu_{\bar{\mathbf{x}}^*})^R \det \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}}} \left(1 + \frac{1}{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}} (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}^{-1} (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*)\right)^{-\frac{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*} + R}{2}}$$

beigeordnet, wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet [67, S. 8,12]. Da die Stichprobenwerte der korrelierten Eingangsgrößen aus derselben Stichprobe vom Umfang K hervorgegangen sind, weisen alle in $\bar{\mathbf{x}}^*$ enthaltenen Schätzwerte denselben Freiheitsgrad $\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*} = K - R^*$ auf.

Miteinander korrelierte Eingangsgrößen, die einer Gleichverteilung unterliegen, wird eine multivariate Gleichverteilung zugeordnet. Diese kennzeichnet sich ebenfalls durch den besten Schätzwert $\bar{\mathbf{x}}^*$ und die korrespondierende Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*}$. Im Gegensatz zu den gaußförmigen Verteilungen kann in diesem Fall jedoch kein geschlossener Ausdruck für die multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angegeben werden.

3.3.4 Schritt IV: Berechnung des besten Schätzwerts und der kombinierten Standardmessunsicherheit

Für die numerische Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messgrößen muss zunächst die Anzahl der Monte-Carlo-Durchläufe K festgelegt werden. Hieraus leitet sich ab, wie viele Zufallswerte für jede Eingangsgröße entsprechend der jeweils beigeordneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion generiert werden müssen. Diese werden anschließend genutzt, um die sich ergebenden besten Schätzwerte für die Messgrößen und ihre beizuordnende Messunsicherheit zu ermitteln.

Wahl der Anzahl an Monte-Carlo-Simulationsschritten

Zur Berechnung der besten Schätzwerte und ihrer Standardunsicherheiten wird im ersten Schritt die Anzahl der Monte-Carlo-Simulationsschritte K festgelegt. Eine hohe Anzahl steigert das Vertrauen in das Simulationsergebnis, erhöht jedoch den notwendigen Rechenaufwand. Ein sinnvoller Wert für K wird im Wesentlichen durch die geforderte Überdeckungswahrscheinlichkeit P bestimmt. Als Kompromiss zwischen einer guten Approximation der exakten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Werte der Messgrößen und der Begrenzung des Rechenaufwands wird in [62, S. 29] für die Anzahl der Simulationsschritte das Kriterium

$$K \geq 10^4 \frac{1}{1 - P} \quad (3.18)$$

vorgeschlagen. Durch diese Wahl erhöht sich die Anzahl der Simulationsschritte bei einem höheren Grad an Vertrauen in einem als hinreichend angenommenen Maße.

Erzeugung von Zufallszahlen

Bei jedem Simulationsdurchlauf ist von jeder der im Modell hinterlegten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_{\mathbf{x}^*}(\bar{\mathbf{x}}^*)$ eine Realisierung, d. h. ein Vektor $\bar{\mathbf{x}}^*$, zu generieren. Zur Generierung von Werten \mathbf{x}^* , die der multivariaten Normalverteilung $N(\bar{\mathbf{x}}^*, \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*})$ genügen, wird nach [62, S. 26] einmalig eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{L} bestimmt, die

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$$

erfüllt. Dies kann beispielsweise mittels einer Cholesky-Zerlegung erreicht werden. Die Transformation

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^* + \mathbf{L}^T \mathbf{x}_{N(0,1)}^* \quad (3.19)$$

überführt die Werte $\mathbf{x}_{N(0,1)}^* \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ einer Standardnormalverteilung mittels der Matrix \mathbf{L} in Werte $\mathbf{x}^* \sim N(\bar{\mathbf{x}}^*, \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*})$ einer Normalverteilung mit der geforderten Unsicherheitsmatrix.

Zur Darlegung von Kenntnissen über Eingangsgrößen, die mittels einer Stichprobenmessung von geringem Umfang ermittelt wurden, muss, wie bereits in Unterabschnitt 3.2.5 erwähnt, eine multivariate t-Verteilung $t_{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}}(\bar{\mathbf{x}}^*, \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}^*})$ herangezogen werden. Zufallswerte werden ähnlich wie bei der multivariaten Normalverteilung durch die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^* + \mathbf{L}^T \mathbf{x}_{N(0,1)}^* \sqrt{\frac{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}}{\chi}}$$

erzeugt [67, S. 12]. Hierbei bezeichnet $\chi \sim \chi_{\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}}^2$ einen Zufallswert der χ^2 -Verteilung mit $\nu_{\bar{\mathbf{x}}^*}$ Freiheitsgraden.

Die Generierung von Zufallswerten für korrelierte Eingangsgrößen, die nicht einer gaußförmigen Verteilung unterliegen, stellt eine komplexe Herausforderung dar und wird daher in der Beschreibung des GUM-Verfahrens explizit nicht behandelt. Dies liegt darin begründet, dass in diesem Fall kein geschlossener Ausdruck für die multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angegeben werden kann, welche die Korrelation berücksichtigt. In den weiteren Kapiteln wird jedoch häufig die Gleichverteilung zur Beschreibung der Kenntnisse über Eingangsgrößen herangezogen. Daher wird folgender Ansatz aus [37] zur Generierung von gleichverteilten und korrelierten Zufallswerten vorgeschlagen.

Zunächst werden für jede Eingangsgröße $X_{r^*}^*$ standardnormalverteilte Werte $\mathbf{x}_{r^*}^*$ generiert. Hierbei wird die Korrelation zwischen den einzelnen Vektoren $\mathbf{x}_{r^*}^*$ durch die vorzugebende Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_{r^*}^*}$ festgelegt. Das Einsetzen aller generierten Wertetupel $(x_1^*, \dots, x_{R^*}^*)$ in die Verteilungsfunktion G der multivariaten Standardnormalverteilung $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ liefert wiederum Funktionswertetupel. Die Funktionswerte bzgl. jeder

Größe unterliegen aufgrund des streng monotonen Anstiegs der Verteilungsfunktion einer Standardgleichverteilung [37] und werden zu den Vektoren $\mathbf{x}_{r^*}^* \sim R(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ zusammengefasst. Durch die Transformation

$$x_{r^*,R}^* = a_{r^*}^- + (a_{r^*}^+ - a_{r^*}^-)x_{r^*,R(0,1)}^*$$

werden gleichverteilte Werte in den jeweiligen Grenzen $a_{r^*}^-$ und $a_{r^*}^+$ erzeugt, die näherungsweise die durch $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_{r^*}^*}$ beschriebene Korrelation aufweisen. Die Abweichung der sich jeweils ergebenden Korrelationskoeffizienten zu den geforderten ist stets kleiner als 2% [37] und kann somit vernachlässigt werden. Durch die Vermeidung des Einsetzens der Werte einzelner Größen aus $\mathbf{x}_{r^*}^*$ in die Verteilungsfunktion G unterliegen diese weiterhin der Standardnormalverteilung, welche mittels Gleichung (3.19) in die geforderte Normalverteilung überführt werden kann. Auf diese Weise können mit diesem Ansatz miteinander korrelierte Zufallswerte erzeugt werden, die jeweils der Normalverteilung oder der Gleichverteilung genügen.

Bester Schätzwert und Standardmessunsicherheit einer skalaren Messgröße

Alle erzeugten Wertetupel der Eingangsgrößen werden jeweils in das Modell (3.3.2)

$$y(k) = f(x_1(k), x_2(k), \dots)$$

eingesetzt, welches den korrespondierenden Schätzwert $y(k)$ für die Messgröße Y des k -ten Durchlaufs liefert. Der beste Schätzwert für die Messgröße wird durch den arithmetischen Mittelwert

$$\bar{y} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(k)$$

aller berechneten Realisierungen $y(1), \dots, y(K)$ bestimmt [62, S. 31]. Es lässt sich direkt die Standardmessunsicherheit

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (y(k) - \bar{y})^2}$$

des besten Schätzwerts bestimmen [62, S. 31].

Bester Schätzwert und Standardmessunsicherheit einer vektoriellen Messgröße

Bei MIMO-Messmodellen mit M vielen Messgrößen wird jede Zeile des Messmodells

$$Y_m(k) = f_m(X_1(k), \dots, X_R(k))$$

K mal ausgewertet. Die hierdurch generierten Werte der Messgrößen werden in der Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} y_1(1) & \cdots & y_1(K) \\ \vdots & & \\ y_M(1) & \cdots & y_M(K) \end{pmatrix}$$

angeordnet. Der arithmetische Mittelwert aller K Monte-Carlo-Durchläufe

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{K} (\mathbf{y}(1) + \dots + \mathbf{y}(K)) \in \mathbb{R}^{(M,1)}$$

wird als bester Schätzwert verwendet. Die Matrix

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}} = \frac{1}{K-1} ((\mathbf{y}(1) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}(1) - \bar{\mathbf{y}})^T + \dots + (\mathbf{y}(K) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}(K) - \bar{\mathbf{y}})^T)$$

ist dann die dem besten Schätzwert beizuordnende Unsicherheitsmatrix [67, S. 27].

3.3.5 Schritt V: Berechnung des Überdeckungsintervalls

Beim Standard-GUM-Verfahren wird der Ausgangsgröße ein bester Schätzwert und eine Standardmessunsicherheit zugeordnet. Das Überdeckungsintervall wird unter Annahme einer Normal- oder t -Verteilung mittels eines Erweiterungsfaktors bestimmt. Da beim Monte-Carlo-Verfahren die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eingangsgrößen fortgepflanzt werden, ist es an dieser Stelle nicht notwendig eine Annahme über die Verteilungen der Messgrößen und schließlich einen zur Überdeckungswahrscheinlichkeit P passenden Erweiterungsfaktor zu treffen. Stattdessen kann das Überdeckungsintervall einer skalaren Messgröße bzw. der Überdeckungsbereich einer vektoriellen Messgröße direkt wie folgt numerisch berechnet werden.

Überdeckungsintervall einer skalaren Messgröße

Die Monte-Carlo-Simulation liefert eine Reihe von Messgrößenwerten $y(1), \dots, y(K)$. Eine Sortierung dieser Werte führt auf die geordneten Werte $y^o(1), \dots, y^o(K)$ und ermöglicht die Darstellung einer Häufigkeitsverteilung, welche eine beliebige Form aufweisen kann.

Bei einer hinreichend großen Anzahl an Durchläufen (vgl. Gleichung (3.18)) stellt die Häufigkeitsverteilung eine gute Näherung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messgröße dar.

Die Grenzen α^- und α^+ des Überdeckungsintervalls werden mit Hilfe von Quantilen bestimmt [62, S. 31]. Hierfür wird zunächst die diskrete Verteilungsfunktion

$$G_Y(y(k)) := \text{Prob}(Y \leq y(k)) = \int_{y_1^o}^{y(k)} g_Y(\tau) \, d\tau, \quad y^o(1) \leq y(k) \leq y^o(K)$$

der geordneten Werte betrachtet (nach [103, S. 31]). Die Verteilungsfunktion gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Wert der Messgröße kleiner oder gleich dem Wert $y(k)$ ist. Die Inverse der Verteilungsfunktion ist die Quantilfunktion

$$G_Y^{-1}(p) := \inf\{y(k) \mid g_Y(y(k)) \geq P\},$$

wobei das Infimum die größte untere Schranke einer Menge reeller Zahlen bezeichnet [103, S. 33]. Die Quantilfunktion $G_Y^{-1}(p)$ liefert den kleinsten Wert $y(k)$ aus der Menge der berechneten Werte $y^o(1), \dots, y^o(K)$, mit dem der Anteil P aller Werte erfasst wird. Die Grenzen des Überdeckungsintervalls mit der geforderten Überdeckungswahrscheinlichkeit P lauten dann

$$\alpha^- = G_Y^{-1}\left(\frac{1-P}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \alpha^+ = G_Y^{-1}\left(\frac{1+P}{2}\right).$$

Überdeckungsbereich einer vektoriellen Messgröße

Werden bei der Messung mehrere Messgrößen betrachtet, muss die Bestimmung eines Überdeckungsbereichs unter Berücksichtigung der Korrelation der Messgrößen bestimmt werden. Der kleinstmögliche Bereich von Werten, die den Messgrößen mit einem Grad an Vertrauen von P zugeordnet werden können, wird durch ein Hyperellipsoid mit der Dimension M beschrieben [67, S. 28], falls die sich ergebende Verteilung der Messgrößenwerte einer Normalverteilung nahe kommt. Dies kann durch eine große Anzahl an Monte-Carlo-Durchläufen sichergestellt werden. Die Gleichung zur Charakterisierung des Hyperellipsoids ist

$$(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}^{-1} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = k_P^2,$$

wobei sein Mittelpunkt durch den besten Schätzwert $\bar{\mathbf{y}}$ und seine Lage durch die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}$ festgelegt wird. Seine Ausdehnung wird durch die Konstante k_P bestimmt. Zur Berechnung von k_P wird zunächst die Transformation

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}})$$

durchgeführt. Die untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} ergibt sich aus der Zerlegung $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. Für den Erweiterungsfaktor k_P wird der kleinstmögliche Wert gewählt, sodass

$$\tilde{\mathbf{y}}^T(k)\tilde{\mathbf{y}}(k) \leq k_P$$

für den geforderten Anteil P an allen transformierten Vektoren erfüllt ist.

3.3.6 Schritt VI: Angabe des vollständigen Messergebnisses

Das mittels einer Monte-Carlo-Simulation berechnete vollständige Messergebnis umfasst die gleichen Größen wie ein mit Hilfe des Standard-GUM-Verfahrens ermitteltes Messergebnis. Der Unterschied besteht ausschließlich in der numerischen Natur der Berechnungsmethode. Zudem ist die Anzahl an Monte-Carlo-Wiederholungen K anzugeben, die zur Erlangung des Ergebnisses durchgeführt wurden.

Das vollständige Ergebnis bei der Messung einer skalaren Messgröße besteht zum einen aus dem besten Schätzwert \bar{y} für die Messgröße Y und der beigeordneten Standardmessunsicherheit $u_{\bar{y}}$. Zum anderen ist der für die geforderte Überdeckungswahrscheinlichkeit P berechnete Erweiterungsfaktor k_P anzugeben. Hieraus leiten sich direkt die Grenzen α^- und α^+ des Überdeckungsintervalls ab. Von dem Intervall

$$\alpha^- \leq Y \leq \alpha^+$$

kann erwartet werden, dass es den festgelegten Anteil P der Verteilung von Werten umfasst, die der Messgröße Y vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Das vollständige Messergebnis bei einer vektoriellen Messgröße umfasst analog den besten Schätzwert $\bar{\mathbf{y}}$, die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}$ sowie den für die geforderte Überdeckungswahrscheinlichkeit P berechneten Erweiterungsfaktor k_P . Dieser spezifiziert in diesem Fall die Ausdehnung eines Hyperellipsoids der Dimension M . Das Hyperellipsoid beschreibt den sinnvollerweise zuzuordnenden Überdeckungsbereich, wobei die Korrelation der Messgrößen berücksichtigt wird.

3.4 Verifizierung der Messunsicherheit mittels Monte-Carlo-Simulation

Die nach dem Standard-GUM-Verfahren ermittelten Ergebnisse lassen sich ohne signifikanten rechentechnischen Aufwand berechnen. Diese Einfachheit wird durch die lineare Unsicherheitsfortpflanzung und die Ausnutzung des zentralen Grenzwertsatzes erreicht. Ob der Linearisierungsfehler der Unsicherheitsfortpflanzung tolerierbar und die Bedingungen für den Grenzwertsatz erfüllt sind, lässt sich oft nur schwer prüfen. Daher wird in [67, S. 34] eine Verifizierung der mit Hilfe des Standard-Verfahrens ermittelten Werte mittels einer Monte-Carlo-Simulation empfohlen. Stimmen beide Messergebnisse näherungsweise überein, kann das einfache Standard-Verfahren zukünftig ohne weitere Prüfung für ähnliche Messaufgaben herangezogen werden. Das Ausmaß der Übereinstimmung beider Ergebnisse wird anhand von Gütemaßen wie folgt bestimmt.

Die zum Vergleich der Ergebnisse herangezogenen Kenngrößen sind der beste Schätzwert \bar{y} , die Standardunsicherheit $u_{\bar{y}}$, der größte Eigenwert λ_{\max} der Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\bar{y}}$ und der ermittelte Erweiterungsfaktor k_P . Für die mittels der Monte-Carlo-Simulation berechneten Ergebnisse wird die jeweilige Anzahl an signifikanten Dezimalstellen η bestimmt. Diese sind $\eta_{u_{\bar{y}_m}}$ der einzelnen in $u_{\bar{y}_m}$ enthaltenen Standardunsicherheiten, $\eta_{\lambda_{\max}}$ des größten Eigenwerts λ_{\max} der Korrelationsmatrix $\mathbf{R}_{\bar{y}}$ sowie η_{k_P} des Erweiterungsfaktors k_P . Jede der Größen kann in Exponentialschreibweise

$$\begin{aligned} u_{\bar{y}_m} &= c_{u,m} \cdot 10^{l_{u,m}} & \Rightarrow \delta_{u,m} &= \frac{1}{2} 10^{l_{u,m}} \\ \lambda_{\max} &= c_{\lambda_{\max}} \cdot 10^{l_{\lambda_{\max}}} & \Rightarrow \rho_{\lambda_{\max}} &= \frac{1}{2} 10^{l_{\lambda_{\max}}} \\ k_P &= c_{k_P} \cdot 10^{l_{k_P}} & \Rightarrow \kappa_{k_P} &= \frac{1}{2} 10^{l_{k_P}} \end{aligned}$$

dargestellt werden, wobei die jeweilige Mantisse c die durch η bestimmte Anzahl an signifikanten Stellen aufweist. Hieraus werden die numerischen Toleranzen $\delta_{u,m}$, welche auch für die besten Schätzwerte \bar{y}_m gelten, sowie $\rho_{\lambda_{\max}}$ und κ_{k_P} bestimmt. Die Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens gelten nach [67, S. 35] als verifiziert, falls die Gütebedingungen

$$\begin{aligned} |\bar{y}_m^{\text{Std}} - \bar{y}_m^{\text{MC}}| &\leq \delta_{u,m}, \\ |u_{\bar{y}_m}^{\text{Std}} - u_{\bar{y}_m}^{\text{MC}}| &\leq \delta_{u,m}, \\ |\lambda_{\max}^{\text{Std}} - \lambda_{\max}^{\text{MC}}| &\leq \rho_{\lambda_{\max}}, \\ |k_P^{\text{Std}} - k_P^{\text{MC}}| &\leq \kappa_{k_P} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Wie bei jeder Verifizierung hängt ihr Ergebnis von der Qualität der Referenz, d. h. der Monte-Carlo-Simulation, ab. Grundsätzlich leitet sich die Qualität einer Monte-Carlo-Simulation aus der Anzahl an Simulationsdurchläufen ab. Falls die Ergebnisse einer Monte-Carlo-Simulation mit a-priori festgelegter Anzahl an Wiederholungen K nicht vertrauenswürdig erscheinen, kann stattdessen die adaptive Monte-Carlo-Methode zur Verifizierung herangezogen werden. Hierbei wird die Simulation solange fortgesetzt, bis sich die oben genannten Kennwerte $u_{\bar{y}_m}$, λ_{\max} und k_p stabilisiert haben, d. h. nur noch innerhalb der zuvor spezifizierten numerischen Toleranzen $\eta_{u_{\bar{y}_m}}$, $\eta_{\lambda_{\max}}$ und η_{k_p} schwanken. Für eine ausführlichere Behandlung der adaptiven Monte-Carlo-Methode sei auf [67, S. 31] verwiesen.

3.5 Gegenüberstellung der vorgestellten Verfahren zur Beurteilung der Messunsicherheit

Die Messfunktion und die Eingangsgrößenbeurteilungen legen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_Y(\mathbf{y})$ der Messgröße eindeutig fest. Zur Angabe der Funktion muss diese exakt oder näherungsweise berechnet werden. Der *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* [29] bietet mit dem Standard-GUM-Verfahren ein – im Gegensatz zur exakten Berechnung – praktikables Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung der kombinierten Standardmessunsicherheit. Durch seine Erweiterungen [62, 67] werden zudem der Monte-Carlo-Ansatz und der adaptive Monte-Carlo-Ansatz als alternative Verfahren eingeführt. Es stellt sich somit die Frage in welchem Fall welches Verfahren angewendet werden soll. Hierzu werden im Folgenden die Vor- und Nachteile zusammenfassend dargelegt und bewertet.

Grundsätzlich kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_Y(\mathbf{y})$ bei sich linear überlagernden unkorrelierten Eingangsgrößen mittels der Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bestimmt werden [103, S. 230]. Im allgemeineren Fall eines beliebigen Messmodells \mathbf{f} wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_Y(\mathbf{y})$ der multivariaten Messgröße mit Hilfe der Markov-Formel

$$g_Y(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}$$

bei gegebener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_X(\mathbf{x})$ für die Eingangsgrößen und gegebenem Messmodell \mathbf{f} analytisch exakt berechnet (nach [16]). Dies wird jedoch aufgrund des enormen Rechenaufwands üblicherweise nicht durchgeführt. Bereits einfache Messmodelle führen zu umfassenden Berechnungen wie in [16] gezeigt wurde. Dennoch

wird die exakte Berechnungsmethode der Vollständigkeit halber bei der Gegenüberstellung berücksichtigt.

Das Standard-GUM-Verfahren basiert auf dem Gesetz der linearen Unsicherheitsfortpflanzung, was in einer einfach und analytisch durchführbaren Berechnung der Messunsicherheit und der korrespondierenden Kovarianzen resultiert. Die Einfachheit generiert sich dabei aus dem Verzicht auf die Lösung von Faltungsintegralen, was durch die analytische Kombination der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eingangsgrößen notwendig werden würde. Die genaue Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ist nicht erforderlich. Stattdessen werden zwei Kenngrößen – der beste Schätzwert und die Standardunsicherheit – bzgl. jeder Eingangsgröße auf die Messgrößen abgebildet.

Weiterhin wird durch das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz die Linearität bzw. Linearisierbarkeit der Messfunktion vorausgesetzt. Die Prüfung, ob der bei der Linearisierung entstehende Linearisierungsfehler tolerierbar ist, was anhand der Taylor-Reihenglieder höherer Ordnung erfolgen muss, und ob es sich bei den besten Eingangsschätzwerten um Extremstellen der Messfunktion handelt, gestaltet sich aufwändig.

Bei der Berechnung der erweiterten Messunsicherheit ist die Annahme einer Verteilung für die Messgrößen erforderlich, da die sich tatsächlich ergebende Verteilungsform unbekannt ist. Abhilfe schafft der zentrale Grenzwertsatz, der die Annahme einer Normalverteilung gestattet. Hierbei ist die Einhaltung der in Unterabschnitt 3.2.5 genannten Bedingungen zu prüfen, was ebenfalls mühsam ist. In der zweiten Ergänzung des Leitfadens wird von dem zentralen Grenzwertsatz Abstand genommen und die Annahme einer Normalverteilung stattdessen mit dem Prinzip der maximalen Entropie begründet [67, S. 20].

Des Weiteren wird im ursprünglichen Leitfaden [29] bei der Bestimmung der erweiterten Messunsicherheit das Prinzip der Freiheitsgrade bemüht. Eingangsgrößen, die mit Hilfe einer Stichprobenmessung von geringem Umfang beurteilt wurden und zudem einen signifikanten Anteil an der kombinierten Standardmessunsicherheit besitzen, führen auf eine Verringerung der Anzahl an effektiven Freiheitsgraden. Die übliche Annahme einer Normalverteilung für die Messgröße wird in diesem Fall als nicht mehr vertretbar angesehen. Stattdessen wird eine t-Verteilung angesetzt, welche durch ihre größere Breite eine größere Kenntnisunsicherheit repräsentiert. Da für die Berechnung der Anzahl an effektiven Freiheitsgraden mittels der Welch-Satterthwaite-Formel jeder Eingangsgröße – auch den Typ-B-Größen – eine Anzahl an Freiheitsgraden zugeordnet werden muss, wird diese bei Typ-B Größen schlicht auf unendlich gesetzt, sodass diese bei den effektiven Freiheitsgraden nicht berücksichtigt werden.

Dem Standard-GUM-Verfahren steht das Monte-Carlo-Verfahren gegenüber. Hierbei werden die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der einzelnen Eingangsgrößen, d. h.

die gesamten Kenntnisse über die Eingangsgrößen, numerisch fortgepflanzt. Alle Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen müssen vorliegen. Es ist keine Rechenvorschrift erforderlich, welche die Ableitung der relevanten Kenngrößen aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion jeder Eingangsgröße ermöglicht. Bei der Monte-Carlo-Simulation können die Eingangsgrößen mit beliebigen Verteilungen beschrieben werden. Die Implementierung des Monte-Carlo-Verfahrens ist schwierig bzw. unmöglich, falls Zufallswerte für korrelierte Eingangsgrößen erzeugt werden müssen, welche unterschiedlichen Verteilungen unterliegen. Der hohe Rechenaufwand der numerischen Fortpflanzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wird mit einer Approximation der sich tatsächlich ergebenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messgrößen belohnt. Die Bedingungen des zentralen Grenzwertsatzes müssen nicht geprüft werden; auf das Konzept der Freiheitsgrade wird verzichtet. Stattdessen kann der Erweiterungsfaktor direkt aus den Monte-Carlo-Ergebnissen berechnet werden.

Die mögliche Nichtlinearität der Messfunktion stellt kein Problem dar. Eine Linearisierung und Prüfung des Linearisierungsfehlers ist nicht erforderlich. Zudem muss die Messfunktion nicht durch einen geschlossenen, mathematischen Ausdruck gegeben sein. Stattdessen kann die Messung durch einen beliebigen Algorithmus beschrieben werden. Die einzige Voraussetzung ist deterministisches Verhalten, d. h. der Algorithmus muss die Eingangswerte eindeutig auf Werte für die Ausgangsgrößen abbilden. Durch den Verzicht auf die Linearisierung stehen keine Sensitivitätskoeffizienten zur Verfügung. Dies erschwert die Ermittlung der signifikanten Unsicherheitsbeiträge bei der Messunsicherheitsanalyse.

Die Vor- und Nachteile des Monte-Carlo-Verfahrens gelten analog auch für die adaptive Monte-Carlo-Methode. Ihr zusätzlicher Vorteil besteht darin, dass das Ausmaß der Konvergenz zwischen dem numerischen Ergebnis und der exakten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion anhand von Kenngrößen gesichert werden kann. Dies resultiert jedoch in einem erhöhtem, nicht vorhersehbaren Rechenaufwand.

Fazit

Zur Beantwortung der Frage, welches Verfahren für welche Art von Messaufgabe geeignet ist, ist eine Bewertung der Verfahren anhand der aufgezeigten Vor- und Nachteile erforderlich. Eine qualitative Zusammenfassung der durchgeführten Bewertung zeigt Tabelle 3.2. Die Skala der Beurteilung erstreckt sich hierbei von „Kriterium wird voll erfüllt“ (+ +) bis „KO-Kriterium“ (– –).

Die exakte Berechnung kann für realitätsnahe Messaufgaben aufgrund des enormen Rechenaufwands ausgeschlossen werden. Beim Standard-GUM-Verfahren wird eine Viel-

Tabelle 3.2: Bewertung von Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung

Krit. \ Methode	Exakt	Std.-GUM	Monte-Carlo	Monte-Carlo (adaptiv)
Nutzung vollständiger Kenntnisse	+	–	+	+
Modelllinearisierung	+	–	+	+
Erweiterte Messunsicherheit	+	–	O	+
Exakte Lösung	+	–	–	–
Analytische Lösung	+	+	–	–
Rechenaufwand	– –	++	O	–

zahl von Annahmen, Näherungen und Faustformeln getroffen bzw. genutzt, um eine einfach zu berechnende analytische Lösung zu erlangen. Dies steigert zwar die Anwendbarkeit des Verfahrens, jedoch wird damit dem wissenschaftlichen Drang nach einer mathematisch fundierten und physikalisch begründeten Methode nur in begrenztem Maße genüge getan. Die genannten Schwächen werden durch den numerischen Monte-Carlo-Ansatz vermieden. Hierbei werden das gegebene Modell und die dargelegten Kenntnisse unverändert einem Algorithmus zugeführt, ohne dass Annahmen getroffen oder Zusatzbedingungen geprüft werden müssen.

Das Standard-GUM-Verfahren ist aufgrund seiner geringen Komplexität das Verfahren erster Wahl, solange es glaubhafte Ergebnisse liefert. Dies ist für eine Klasse von ähnlichen Messaufgaben einmalig mittels des Monte-Carlo-Verfahrens zu prüfen. Das Standard-GUM-Verfahren eignet sich insbesondere dort, wo nur wenig Rechenleistung zur Verfügung steht, wie es beispielsweise bei Echtzeitanwendungen im Fahrzeug der Fall ist. Falls das Standard-GUM-Verfahren keine sinnvollen Ergebnisse liefert, ist stets das Monte-Carlo-Verfahren zu wählen, wobei die Ergebnisgüte durch den adaptiven Ansatz gesteigert werden kann.

3.6 Methode zur Bereichskalibrierung im Kontext des GUM

Der Prozess der *Kalibrierung* dient der Bestimmung der Messabweichung zwischen dem zu kalibrierenden Messgerät (Prüfling) und dem Referenzmessgerät (Normal) [20, 2.39] (vgl. Abschnitt 2.2). Die Kalibrierung ist von der *Justierung* abzugrenzen, deren Gegen-

stand es ist, die Messabweichung durch Veränderung des Prüflings zu minimieren [20, 3.11]. Die Kalibrierung ist die Voraussetzung für die Justierung und muss nach dieser erneut durchgeführt werden. Bei der sogenannten Einzelwert-Kalibrierung wird dem Prüfling ein Korrektionswert $\kappa_{\bar{y}}$ beigeordnet, der im gesamten Messbereich der Messgröße Y anzuwenden ist und mit einer Unsicherheit behaftet ist (vgl. Unterabschnitt 2.2.2). Eine Einzelwert-Kalibrierung ist jedoch nicht zweckmäßig, falls die Messabweichung über den gesamten Messbereich stark variiert. In diesem Fall wird die dem Korrektionswert beizuordnende Unsicherheit unverhältnismäßig groß. Bei einem solchen Verhalten des Messsystems ist es sinnvoll eine Bereichskalibrierung durchzuführen, bei der ausgehend von Stichprobenmessungen eine möglichst einfache Kalibrierkurve für den gesamten Messbereich bestimmt wird. Die Kalibrierkurve stellt die Grundlage für die Justierung dar.

Das Ziel der Bereichskalibrierung im Kontext des GUM ist es, nicht nur einen variablen Korrektionswert zu bestimmen, sondern diesem auch eine ebenso variante Unsicherheit im Sinne des GUM beizuordnen. Die im folgenden dargestellte Methode basiert auf dem Vorgehen in [29, S. 85-87] zur Bestimmung von linearen Kalibrierfunktionen und dem Ansatz in [119] zur Bestimmung von Kalibrierfunktionen höherer Ordnung.

Aufstellung des Modells

Das Grundmodell der Bereichskalibrierung nach der Messmethode *direkter Vergleich* (vgl. Abbildung 3.6 in Unterabschnitt 3.2.2) lautet

$$\Delta Y = Y - Y_{\text{ref}}.$$

Hierbei stellt ΔY die festgestellte Messabweichung zwischen der angezeigten Messgröße Y und der korrespondierenden Referenzgröße Y_{ref} an insgesamt K Kalibrierpunkten dar. Da dem Referenzwert $\bar{y}_{\text{ref}}(k)$ selbst eine Unsicherheit $u_{\bar{y}_{\text{ref}}(k)}$ beigeordnet ist, ergibt sich zwangsläufig die der Messabweichung beizuordnende Unsicherheit

$$u_{\overline{\Delta y(k)}} = u_{\bar{y}_{\text{ref}}(k)},$$

wobei angenommen wird, dass der Messwert $y(k)$ korrekt abgelesen wird. Im allgemeinen Fall wird der Messabweichung die Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\overline{\Delta y}}$ beigeordnet.

Bestimmung der Kalibrierkurve

Der Zusammenhang zwischen den festgestellten Messabweichungen $\overline{\Delta y(k)}$ an den jeweiligen Kalibrierpunkten $y(k)$ wird durch ein Polynom

$$\begin{pmatrix} \overline{\Delta y(1)} \\ \vdots \\ \overline{\Delta y(k)} \\ \vdots \\ \overline{\Delta y(K)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y(1) & \cdots & y^{m-1}(1) & \cdots & y^{M-1}(1) \\ & & & \vdots & & \\ 1 & y(k) & \cdots & y^{m-1}(k) & \cdots & y^{M-1}(k) \\ & & & \vdots & & \\ 1 & y(K) & \cdots & y^{m-1}(K) & \cdots & y^{M-1}(K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_m \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_M \end{pmatrix}$$

mit M vielen Koeffizienten $\bar{\alpha}_m$ bzw.

$$\overline{\Delta \mathbf{y}} = \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\alpha}}$$

modelliert. Da die Messabweichung an mehr Kalibrierpunkten gemessen wird als Koeffizienten der Kalibrierkurve zu bestimmen sind ($K > M$), ist das Gleichungssystem überstimmt. Die besten Schätzwerte der Koeffizienten $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ ergeben sich durch die Anwendung der Moore-Penrose-Pseudoinversen:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbf{y}} &= \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{Y}^T \overline{\Delta \mathbf{y}} &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \overline{\Delta \mathbf{y}} &= \bar{\boldsymbol{\alpha}} \\ \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\alpha}} &= (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \overline{\Delta \mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Kalibrierfunktion

$$\Delta y_{\kappa}(y) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 y + \dots + \bar{\alpha}_M y^{M-1},$$

mit Hilfe derer jedem Messergebnis \bar{y} ein Korrektionswert $\kappa_{\bar{y}} = \Delta y_{\kappa}(\bar{y})$ beigeordnet wird.

Beurteilung der Unsicherheit der Kalibrierkurve

Da die besten Schätzwerte der Koeffizienten mittels einer auf K Messungen begrenzten Stichprobe bestimmt werden, ist dem Verlauf der Kalibrierkurve eine Unsicherheitsmatrix $\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}$ beizuordnen. Für ihren Zusammenhang mit der Unsicherheit der Messabweichungen gilt entsprechend dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (3.14) bzw. Anhang A

$$\mathbf{U}_{\overline{\Delta \mathbf{y}}} = \mathbf{Y} \mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} \mathbf{Y}^T. \quad (3.20)$$

Die Stellen $y(m)$ selbst und die für die dort gemessenen Messabweichungen beigeordneten Unsicherheiten $\mathbf{U}_{\Delta y}$ sind durch den Kalibrierprozess bekannt. Daher kann die den Koeffizienten der Kalibrierkurve beizuordnende Unsicherheitsmatrix

$$\mathbf{U}_{\bar{\alpha}} = (\mathbf{Y}^T (\mathbf{U}_{\Delta y})^{-1} \mathbf{Y})^{-1} \quad (3.21)$$

angegeben werden, was sich durch das Einsetzen von Gleichung (3.21) in Gleichung (3.20) leicht überprüfen lässt.

Zur Ermittlung einer Unsicherheitsangabe, die dem korrespondierenden Funktionswert der Kalibrierkurve an der Stelle y beigeordnet werden kann, wird analog zur Matrix \mathbf{Y} der Zeilenvektor

$$\mathbf{y}^T = (1 \quad y \quad \dots \quad y^{m-1} \quad \dots \quad y^{M-1})$$

konstruiert. Mittels der Unsicherheitsmatrix der Koeffizienten $\mathbf{U}_{\bar{\alpha}}$ lässt sich die Unsicherheit

$$u_{\Delta y_{\kappa}(y)} = \mathbf{y}^T \mathbf{U}_{\bar{\alpha}} \mathbf{y}$$

ermitteln, die dem durch Interpolation bzw. Extrapolation berechneten Korrektionswert $\Delta y_{\kappa}(y)$ beigeordnet wird.

KAPITEL 4

Erweiterung des GUM-Verfahrens auf zeitvariante Größen und dynamische Messsysteme

Von den derzeitigen GUM-Verfahren (vgl. Kapitel 3) werden nur solche Messvorgänge abgedeckt, die mittels einer zustandslosen Messfunktion und zeitinvarianten Ein- und Ausgangsgrößen modelliert werden können, wie bereits im Unterabschnitt 1.2.2 angedeutet wurde. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, d. h. alle beteiligten Größen als zeitinvariant angenommen werden dürfen. Häufig bleibt der Wert der Messgröße während des Messprozesses jedoch nicht konstant, was z. B. bei vielen Messungen im Straßenverkehr der Fall ist. Es ist daher notwendig, das existierende Standard-GUM-Verfahren bzgl. zeitvarianter Größen und dynamischer Messsysteme weiterzuentwickeln, um auch für diesen Fall eine standardkonforme Messunsicherheitsangabe zu ermöglichen. Es erscheint sinnvoll, das wohletablierte Verfahren so weit wie möglich beizubehalten und dennoch die Behandlung neuer Klassen von Messfunktionen zu integrieren. Eine gangbare Weiterentwicklung wird in diesem Kapitel vorgestellt. Die Weiterentwicklung gliedert sich entsprechend Tabelle 1.1 in drei unterschiedliche Kategorien. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 zeitvariante Größen bei einem nach wie vor statischen Messsystem betrachtet. Anschließend werden in Abschnitt 4.2 nichtlineare und in Abschnitt 4.3 lineare dynamische Messsysteme behandelt, die einen inneren Zustand aufweisen. In Abschnitt 4.3 wird hierbei das die Messunsicherheit beschreibende dynamische System detailliert analysiert und dessen Verhalten anhand zweier typischer Beispiele aus der Fahrzeugtechnik demonstriert.

4.1 Messunsicherheitsbeurteilung bei zeitvarianten Größen

In diesem und den folgenden Abschnitten werden grundsätzlich nur zeitdiskretisierte Größen und Modellformen betrachtet. Dies liegt zum einen in der Tatsache begründet, dass hierdurch in den Messmodellen keine zeitlichen Ableitungen auftreten und sich somit die mathematischen Hilfsmittel vereinfachen sowie der notwendige Rechenaufwand verringert wird. Zum anderen werden alle digitalen Messgeräte bzw. Messdatenspeicher mit einer bestimmten Messrate betrieben. Hierdurch stehen Messwerte nur zu gewissen Zeitpunkten zur Verfügung. Eine kontinuierliche Messunsicherheitsbeurteilung, bei der auch Zeitspannen betrachtet würden, zu denen keine Messwerte vorhanden sind, ist nicht sinnvoll.

Der GUM fokussiert auf die Messunsicherheitsbeurteilung von Messungen, bei denen sich der Funktionswert der Messfunktion unmittelbar aus den zum Messzeitpunkt vorliegenden, konstanten Werten der Eingangsgrößen ergibt (vgl. Tabelle 1.1 und Gleichung (3.6)). Darüber hinaus existieren jedoch Messungen, bei denen die Eigenschaften der Ein- und Ausgangsgrößen im Laufe der Messzeit variieren. Hierbei müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Im ersten Fall wird angenommen, dass einige Einflüsse auf die Messgröße unbekannt sind oder deren Modellierung zu komplex ist, sodass diese als zufällige Effekte interpretiert werden müssen. Dies kann zum einen durch einen Rauschprozess $\Psi(k)$ beschrieben werden, der den modellierten Wert der dann zeitvarianten Messgröße $Y(k)$ überlagert (vgl. Tabelle 1.1):

$$Y(k) = f(X) + \Psi(k).$$

Somit ergibt sich für jedes Messergebnis \bar{y} eine nach wie vor zeitinvariante Unsicherheit

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{u_{\bar{y}\text{GUM}}^2 + \sigma_{\Psi}^2}, \quad (4.1)$$

die sich aus der nach dem Standard-GUM-Verfahren ermittelten Standardmessunsicherheit $u_{\bar{y}\text{GUM}}$ und der Standardabweichung des modellierten Prozessrauschens σ_{Ψ} zusammensetzt. Zum anderen wird an dieser Stelle vorgeschlagen, die durch veränderte Wiederholbedingungen hervorgerufene Streuung als signifikante Eigenunsicherheit (definitorische Unsicherheit) $u_{d,\bar{y}}$ der Messgröße, d. h. als mit begrenzten Informationen beschriebene Größendefinition, zu interpretieren und diese mit in die Unsicherheit des besten Schätzwerts einzubeziehen. Die Unsicherheit des besten Schätzwerts

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{u_{\bar{y}\text{GUM}}^2 + u_{d,\bar{y}}^2} \quad (4.2)$$

setzt sich dann sowohl aus einer Messunsicherheit als auch aus einer Eigenunsicherheit zusammen. Diese Sichtweise befindet sich im Einklang mit der Tatsache, dass die Eigenunsicherheit die kleinstmögliche Standardunsicherheit darstellt [20, 2.27], welche auch bei vollständiger Kenntnis über das Messsystem ($u_{\bar{Y}_{\text{GUM}}} = 0$) erhalten bleibt. Auch bei dieser Interpretation ergibt sich, trotz der zeitvarianten Messgröße, eine zeitinvariante und von vorangegangenen Beurteilungen unabhängige Messunsicherheit.

Im zweiten Fall können sämtliche Einflussgrößen auf die Messung durch eine Messfunktion

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k) \quad (4.3)$$

bzw.

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(k)) \quad (4.4)$$

modelliert werden, wobei im Unterschied zum Standard-GUM-Verfahren alle Größen eine Zeitabhängigkeit aufweisen. Somit unterliegen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die jeder Eingangsgröße beigeordnet werden, einem zeitlichen Verlauf. Die Kenntnisse über die Eingangsgrößen müssen im Vorfeld der Messung für den gesamten Messzeitraum oder in Echtzeit während des Messvorgangs in Form von zeitvarianten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dargelegt werden. Dies ermöglicht eine Durchführung der Messunsicherheitsbeurteilung nach dem Standard-GUM-Verfahren bzw. dem Monte-Carlo-Ansatz in jedem Zeitschritt und führt auf eine zeitvariante, aber von vorangegangenen Beurteilungen nach wie vor unabhängige Messunsicherheitsangabe $u_{\bar{Y}}(k)$.

4.2 Messunsicherheitsbeurteilung bei nichtlinearen dynamischen Messsystemen

Bei den im Leitfaden beschriebenen Methoden wird die durchzuführende Messung mit Hilfe einer zustandslosen Funktion modelliert, die alle Eingangsgrößen direkt auf die Messgröße abbildet. Diese Form der Modellierung resultiert aus der Betrachtung von Messungen, bei denen der Messwert ausschließlich von den aktuell vorliegenden Messbedingungen bestimmt und vom Messgerät unmittelbar ausgegeben wird. Beim Einsatz von automatisierten Messsystemen werden meist über die Zeit variierende Messwerte erfasst und einem dynamischen System zugeführt, welches der Nachbereitung der Messwerte wie z. B. der Signalglättung dient. Eine derartige Messanordnung zeigt Abbildung 4.1 [138] in der von [121] vorgeschlagenen Notation. Bei dieser Klasse von Messungen muss die algebraische Abbildungsvorschrift bei der Modellbildung durch eine oder mehrere Differenzgleichungen ersetzt werden. An dieser Stelle wird die Dynamik, wie in [118] vorgeschlagen, durch Zustandsraummodelle modelliert, da diese eine anschauliche Interpretation erlauben und Vorteile bei der späteren Implementie-

rung bieten. Zudem treten hierbei ausschließlich Differenzengleichungssysteme erster Ordnung im mathematischen Sinne auf. Alle dargestellten Größen sind zeitabhängig. Allerdings wurde der Zeitindex k in Abbildung 4.1 aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen. Der zu betrachtende Prozess wird durch einen Source-Block repräsentiert,

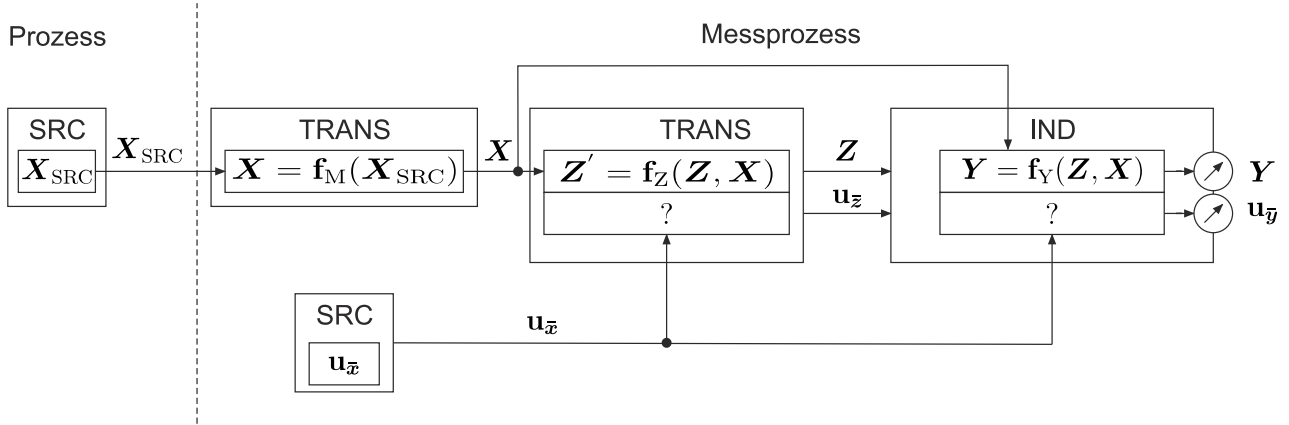


Abbildung 4.1: Betrachtete Messanordnung mit dynamischem Anteil

dessen Ausgangsgröße $\mathbf{X}_{\text{SRC}}(k)$ die zu messende Größe darstellt. Die Transformation der zu messenden Größe $\mathbf{X}_{\text{SRC}}(k)$ in die gemessene Größe $\mathbf{X}(k)$ wird durch

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{f}_M(\mathbf{X}_{\text{SRC}}(k))$$

modelliert. Der entsprechende Transformations-Block repräsentiert ein statisches System, sodass das Standard-GUM-Verfahren direkt auf die Messfunktion \mathbf{f}_M angewendet werden kann. Die Unsicherheitsbeurteilung ist ebenfalls durch einen Source-Block dargestellt. Seine Ausgangsgröße $\mathbf{u}_{\bar{\mathbf{x}}}(k)$ wird dem Schätzwert $\bar{\mathbf{x}}(k)$ beigeordnet. Sowohl der Schätzwert $\bar{\mathbf{x}}(k)$ für \mathbf{X} als auch seine assoziierte Unsicherheit $\mathbf{u}_{\bar{\mathbf{x}}}(k)$ werden durch das nachfolgende dynamische System propagiert, das der Verarbeitung des Signals $\bar{\mathbf{x}}(k)$ dient. Das Modell \mathbf{f}_Z des Transformations-Blocks beschreibt die Beziehung zwischen dem aktuellen Zustand \mathbf{Z} , dem aktuellen Eingang \mathbf{X} und dem Nachfolgezustand $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}(k + 1)$. Die Beziehung zwischen der Eingangsunsicherheit $\mathbf{u}_{\bar{\mathbf{x}}}(k)$ und der resultierenden Unsicherheit des Ausgangs $\mathbf{u}_{\bar{\mathbf{z}}}(k)$ ist zunächst unklar und wird im Folgenden detailliert untersucht, um den Zusammenhang analytisch herzuleiten. Die Ausgangsfunktion \mathbf{f}_Y ist das Modell der Anzeigeeinheit und beschreibt die Beziehung zwischen dem Eingang \mathbf{X} , dem Zustand \mathbf{Z} und der angezeigten Ausgangsgröße \mathbf{Y} .

Im Folgenden wird die neue Modellstruktur in konsistenter Weise in das bestehende Standard-GUM-Verfahren integriert. Dabei wird die Fragestellung beantwortet, wie be-

kannte Eingangsunsicherheiten durch das dynamische System propagiert werden. Hierbei pflanzen sich die Unsicherheiten der Eingangsgrößen gemäß des linearen Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes (3.14) zunächst auf die Zustandsgrößen und anschließend auf die Ausgangsgrößen des Messsystems fort. Dieses Prinzip lässt sich in Anlehnung an die einzelnen Schritte des Standard-GUM-Verfahrens wie folgt darstellen, wobei nur auf die zu modifizierenden Schritte II und IV eingegangen wird.

4.2.1 Schritt II: Modellierung der Messung

Die Messunsicherheitsbeurteilung für den dynamischen Fall erfordert die Erweiterung des Standard-GUM-Verfahrens auf die Klasse der dynamischen Messsysteme, welche einen inneren Zustand aufweisen. Anstelle von Gleichung (3.6) wird daher im Folgenden das zeitdiskrete Zustandsraummodell verwendet, das die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(k+1) &= \begin{pmatrix} Z_1(k+1) \\ \vdots \\ Z_N(k+1) \end{pmatrix} = \mathbf{f}_Z(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) = \begin{pmatrix} f_{Z1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) \\ \vdots \\ f_{ZN}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Y}(k) &= \begin{pmatrix} Y_1(k) \\ \vdots \\ Y_M(k) \end{pmatrix} = \mathbf{f}_Y(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) = \begin{pmatrix} f_{Y1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) \\ \vdots \\ f_{YM}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

besitzt. Hierbei ist \mathbf{f}_Z die Zustandsfunktion und \mathbf{f}_Y die Ausgangsfunktion. Der Eingangsgrößenvektor ist $\mathbf{X} = (X_1 \cdots X_R)^T \in \mathbb{R}^R$. In analoger Weise bezeichnen die Größen $\mathbf{Z} = (Z_1 \cdots Z_N)^T \in \mathbb{R}^N$ den Zustandsvektor und $\mathbf{Y} = (Y_1 \cdots Y_M)^T \in \mathbb{R}^M$ den Vektor der Ausgangsgrößen.

4.2.2 Schritt IV: Berechnung der besten Zustands- und Ausgangsschätzwerte und ihrer kombinierten Unsicherheit

Die Grundidee bei der Anwendung des Standard-GUM-Verfahrens auf einen Messvorgang, der als dynamisches System modelliert werden kann, besteht darin, den Algorithmus für jeden Zeitschritt sowohl auf die Zustandsfunktion als auch auf die Ausgangsfunktion anzuwenden. Durch das Zustandsraummodell (4.5) wird die Entwicklung des Zustands über die Zeit beschrieben. Der Schätzwert des Nachfolgezustands

$$\bar{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{f}_Z(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))$$

wird durch das Einsetzen der aktuellen Eingangs- und Zustandschätzwerte in die Zustandsfunktion berechnet. Neben diesem Zustandsschätzwert wird auch seine Unsicherheit propagiert. Dabei gelten die selben Annahmen wie auch beim Standard-GUM-Verfahren (vgl. Unterabschnitt 3.2.4). Die Entwicklung der Unsicherheiten erfolgt entsprechend dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (3.14):

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k+1) = \mathbf{C}_{\mathbf{Z}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{x}}}(k) \mathbf{C}_{\mathbf{Z}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))^T.$$

Hierbei bezeichnen

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{x}}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}(k) \end{pmatrix}$$

die kombinierte Unsicherheitsmatrix der Zustands- und Eingangsgrößen und

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\mathbf{Z}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_N} & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_R} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{\mathbf{Z}N}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}N}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_N} & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}N}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Z}N}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_R} \end{pmatrix}$$

die Sensitivitätsmatrix der Zustandsfunktion $\mathbf{f}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))$. Die Zustandsgrößen des nächsten Zeitschritts werden durch die Überlagerung der aktuellen Zustands- und Eingangsgrößen bestimmt. Unter Einhaltung der in Unterabschnitt 3.2.5 genannten Bedingungen gilt der zentrale Grenzwertsatz und die Zustandsgrößen können als normalverteilt angenommen werden. Der Schätzwert der Ausgangsgröße wird in analoger Weise mittels

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{f}_{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))$$

berechnet. Die korrespondierende Unsicherheitsmatrix ist

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}(k) = \mathbf{C}_{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{x}}}(k) \mathbf{C}_{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))^T,$$

wobei

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}(\bar{\mathbf{z}}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\mathbf{Y}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_N} & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}1}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_R} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{\mathbf{Y}M}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}M}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{z}_N} & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}M}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial f_{\mathbf{Y}M}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))}{\partial \bar{x}_R} \end{pmatrix}$$

die Sensitivitätsmatrix der Funktion $\mathbf{f}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k))$ ist.

4.3 Messunsicherheitsbeurteilung bei linearen dynamischen Messsystemen

Bei linearen Messsystemen vereinfacht sich die Ermittlung der Ausgangsunsicherheit erheblich, da die in jedem Zeitschritt zu wiederholende Linearisierung des Modells entfällt. Hierdurch wird eine einfache analytische Untersuchung des Systemverhaltens mit konventionellen Methoden der Theorie linearer Systeme ermöglicht. Dies spielt insbesondere hinsichtlich der Stabilität eine große Rolle und erlaubt Aussagen über die Tendenz der Zustandsunsicherheit über die Zeit sowie mögliche stationäre Werte für die Unsicherheit.

4.3.1 Schritt II: Modellierung der Messung

Für den Fall, dass der Messvorgang als lineares System modelliert werden kann, lässt sich das Modell (4.5) nach [137] in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(k+1) &= \mathbf{f}_Z(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(k) + \mathbf{B}\mathbf{X}(k), \quad \text{mit } \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Y}(k) &= \mathbf{f}_Y(\mathbf{Z}(k), \mathbf{X}(k)) = \mathbf{C}\mathbf{Z}(k) + \mathbf{D}\mathbf{X}(k). \end{aligned} \quad (4.6)$$

darstellen. Die Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N \times N)}$, die Eingangsmatrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(N \times R)}$, die Ausgangsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(M \times N)}$, die Durchgriffsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(M \times R)}$ sowie der Anfangszustand \mathbf{Z}_0 stellen hierbei die bei der Modellierung zu bestimmenden Parameter des linearen Zustandsraummodells dar. Die Ausgangsmatrix \mathbf{C} ist im Folgenden sorgfältig von den Sensitivitätsmatrizen \mathbf{C}_Z von \mathbf{f}_Z bzw. \mathbf{C}_Y von \mathbf{f}_Y zu unterscheiden. Die Sensitivitätsmatrizen werden von nun an nur noch mit dem dazugehörigen Index verwendet, um die in der Metrologie und der Regelungstechnik etablierten Notationen im Einklang beizubehalten.

4.3.2 Schritt IV: Berechnung der besten Zustands- und Ausgangsschätzwerte und ihrer kombinierten Unsicherheit

Der aktuelle Schätzwert $\bar{\mathbf{z}}(k)$ des Zustands $\mathbf{Z}(k)$ und der Schätzwert $\bar{\mathbf{x}}(k)$ für die Eingangsgröße $\mathbf{X}(k)$ führen auf den besten Schätzwert des Nachfolgezustands

$$\bar{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}(k),$$

da (4.6) ein lineares System repräsentiert. Der beste Ausgangsschätzwert

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}(k)$$

wird in analoger Weise bestimmt.

Das Gesetz der Unsicherheitsfortpflanzung (3.14) gilt für jeden Zeitschritt:

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k+1) = \mathbf{C}_Z \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{x}}}(k) \mathbf{C}_Z^T, \quad (4.7)$$

wobei

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{x}}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}(k) \end{pmatrix}$$

die Unsicherheitmatrix der Zustands- und Eingangsgrößen umfasst. Bei der linearen Modellform sind die Sensitivitätsmatrizen

$$\mathbf{C}_Z = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{C}_Y = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

nicht von den Zustands- oder Eingangsgrößen abhängig. Somit ist das Einsetzen der zeitabhängigen besten Schätzwerte $\bar{\mathbf{z}}(k)$ bzw. $\bar{\mathbf{x}}(k)$ nicht notwendig. Die Sensitivitätsmatrizen müssen nicht aufwändig berechnet werden und stehen bereits vor der Bestimmung der Standardmessunsicherheiten für alle Zeiten k zur Verfügung. Dies steigert in erheblichen Maße die Anwendbarkeit des Verfahrens bei Echtzeitanwendungen, zumal insbesondere bei eingebetteten Systemen typischerweise nur eine stark limitierte Rechenleistung zur Verfügung steht. Die Berechnung der Unsicherheitsmatrizen vereinfacht sich zu

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{x}}}(k) \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^T, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{x}}}(k) \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^T. \quad (4.9)$$

4.3.3 Analyse des Systemverhaltens

Der beste Schätzwert der Messgröße kann mit Hilfe der Bewegungsgleichung für jeden beliebigen Zeitschritt

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\bar{\mathbf{z}}(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}(j) + \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}(k)$$

direkt berechnet werden (nach [82, S. 435]). Die Bewegungsgleichung ergibt sich unmittelbar aus der Lösung des Differenzengleichungssystems (4.6).

Für die Analyse der sich im Laufe der Zeit entwickelnden Unsicherheiten und Kovarianzen der Zustands- bzw. der Ausgangsgrößen ist die Darstellung (4.8) bzw. (4.9) ungeeignet. Dies ist darin begründet, dass die im nächsten Zeitschritt entstehende Unsicherheitsmatrix durch die Multiplikation nichtquadratischer Matrizen erfolgt und somit die konventionellen Methoden zur Analyse des Verhaltens linearer System nicht angewendet werden können. Deshalb ist die Überführung von Gleichung (4.8) in die übliche Zustandsraumdarstellung erforderlich, was im Folgenden aufgezeigt wird.

Zunächst wird Gleichung (4.8) in

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k+1) &= (\mathbf{A} \ \mathbf{B}) \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{x}}}(k) (\mathbf{A} \ \mathbf{B})^T \\ &= (\mathbf{A} \ \mathbf{B}) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}}(k) \mathbf{B}^T, \end{aligned} \quad (4.10)$$

umgeformt, womit die Entwicklung der Zustandsunsicherheiten durch zwei getrennte Summanden dargestellt wird. Für weitere Umformungen wird die Matrix-Vektorisierung nach [78, S. 145] sowie das Kronecker-Produkt [9, S. 268] [78, S. 145] benötigt.

Definition 2 (Matrix-Vektor) Sei $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{(N \times N)}$ mit den Spaltenvektoren $\mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^{(N \times 1)}$ ($n = 1, \dots, N$). Dann heißt

$$\text{vec}\{\mathbf{U}\} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(N^2 \times 1)}$$

Matrix-Vektor von \mathbf{U} . ◇

Die Vektorisierung bezeichnet somit die Überführung einer Matrix in einen Spaltenvektor, dessen Elemente die Spaltenvektoren der zu vektorisierenden Matrix darstellen. Eine in diesem Zusammenhang wichtige Eigenschaft des Vektorisierungsoperators zeigt Satz 2, der leicht bewiesen werden kann und im Folgenden genutzt wird.

Satz 2 Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(\alpha \times \beta)}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{(\alpha \times \beta)}$ mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\beta$ bzw. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\beta$, dann gilt:

$$\text{vec}\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} = \text{vec}\{\mathbf{A}\} + \text{vec}\{\mathbf{B}\}.$$

Beweis 1 Für die Vektorisierung der Summe zweier Matrizen gilt der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \text{vec}\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} &= \text{vec}\left\{\left(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{a}_\beta + \mathbf{b}_\beta\right)\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_\beta + \mathbf{b}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_\beta \end{pmatrix} \\ &= \text{vec}\{\mathbf{A}\} + \text{vec}\{\mathbf{B}\}. \end{aligned} \quad \square$$

Das Kronecker-Produkt zweier Matrizen erzeugt eine Matrix, bei der sich jedes Element aus der Multiplikation des entsprechenden Elements der ersten Matrix mit der zweiten Matrix ergibt (s. Definition 3).

Definition 3 (Kronecker-Produkt) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N \times N)}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{(N \times R)}$, dann heißt

$$\Lambda = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) := \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & \cdots & a_{NR}\mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(N^2 \times NR)}$$

das Kronecker-Produkt von \mathbf{A} und \mathbf{B} . ◇

Eine für die systemtheoretische Analyse der Messdynamik geeignete Darstellung des Systems (4.10) ergibt sich unter Verwendung von Theorem 1, welches den Kern der Überführung von Gleichung (4.7) in ein Zustandsraummodell darstellt.

Theorem 1 Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N \times N)}$ und $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{(N \times N)}$, dann gilt für den quadratischen Ausdruck:

$$\text{vec}\{\mathbf{AUA}^T\} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\text{vec}\{\mathbf{U}\}.$$

Beweis 2 Der Beweis von Theorem 1 ergibt sich durch die Umformung des quadratischen Ausdrucks in die Definition des Kroneckerprodukts (Definition 3):

$$\begin{aligned}
 \text{vec} \{ \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{A}^T \} &= \text{vec} \left\{ \mathbf{A} (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{vec} \left\{ \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{11}u_{11} + \dots + a_{1N}u_{1N} & \cdots & a_{N1}u_{11} + \dots + a_{NN}u_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}u_{N1} + \dots + a_{1N}u_{NN} & \cdots & a_{N1}u_{N1} + \dots + a_{NN}u_{NN} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{vec} \left\{ \mathbf{A} (a_{11}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{1N}\mathbf{u}_N \quad \cdots \quad a_{N1}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{NN}\mathbf{u}_N) \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} (a_{11}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{1N}\mathbf{u}_N) \\ \vdots \\ \mathbf{A} (a_{N1}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{NN}\mathbf{u}_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}a_{11} & \cdots & \mathbf{A}a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}a_{N1} & \cdots & \mathbf{A}a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{A} & \cdots & a_{1N}\mathbf{A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{A} & \cdots & a_{NN}\mathbf{A} \end{pmatrix} \text{vec} \{ \mathbf{U} \} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \text{vec} \{ \mathbf{U} \}.
 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ die Spaltenvektoren von \mathbf{U} . □

Unter Nutzung der Vektorisierung (Definition 2) der Unsicherheitsmatrix, des Kroneckerprodukts (Definition 3) sowie des Satzes 2 und des Theorems 1 kann die Zustandsgleichung (4.10) umgeschrieben werden:

$$\text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k+1) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \} (k). \quad (4.11)$$

Für die Unsicherheitsmatrix des Ausgangs gilt analog:

$$\text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{y}}} \} (k) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k) + (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{x}}} \} (k). \quad (4.12)$$

Gleichung (4.11) weist die Grundform der Zustandsgleichung eines linearen Zustandsraummodells auf, bei dem die Quadrate der Zustandsunsicherheiten sowie die Kovarianzen im Zustandsvektor $\text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k)$ auftreten. Dies ermöglicht die Anwendung der aus der Systemtheorie bekannten Analysemethoden für lineare Systeme in Zustandsraumdarstellung.

Im Gegensatz zum statischen Messsystem (vgl. Gleichung (3.6)), bei dem den Messgrößen ausschließlich eine von den Eingangsgrößen erzwungene Wirkung aufgeprägt

wird, weist die Zustandsunsicherheit eine Eigenbewegung auf, welche die erzwungene Bewegung überlagert. Unter Nutzung von Satz 2 kann

$$\text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \}_{\text{eigen.}} (k+1) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k) = \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \} (k+1) - \text{vec} \{ \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}} \}_{\text{erzw.}} (k+1)$$

geschrieben werden. Die Entwicklung der Eigendynamik hängt maßgeblich von der Stabilität des Messsystems ab.

Stabilität der Zustandsunsicherheit. Das System (4.11) beschreibt die Entwicklung der Unsicherheitsmatrix über die Zeit. Es kann asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil sein. Für den Fall, dass die Bedingung aus Satz 3 gilt, liegt asymptotische Stabilität vor und die Eigenbewegung des Systems (4.11) tendiert gegen null. Die Elemente der Unsicherheitsmatrix verkleinern sich, wenn dem System keine oder nur geringe Unsicherheit durch die Eingangsgröße \mathbf{X} zugeführt wird.

Satz 3 Das System (4.11) ist asymptotisch stabil, wenn $|\lambda_n| < 1$ für alle Eigenwerte $\lambda_n (n = 1, \dots, N)$ der Matrix \mathbf{A} gilt.

Beweis 3 Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N \times N)}$ mit den Eigenwerten $\lambda_n (n = 1, \dots, N)$, dann besitzt die Matrix $\Lambda = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \in \mathbb{C}^{(N^2 \times N^2)}$ die Eigenwerte

$$(\lambda_n \lambda_\eta) (n = 1, \dots, N ; \eta = 1, \dots, N)$$

[78, S. 141]. Wenn für alle Eigenwerte von \mathbf{A} $|\lambda_n| < 1$ gilt, liegen auch alle Eigenwerte von Λ innerhalb des Einheitskreises der komplexen Ebene. Das durch Gleichung (4.11) repräsentierte System ist asymptotisch stabil. \square

Ist das System grenzstabil, nehmen die Komponenten der Zustandsunsicherheitsmatrix nur dann zu, wenn durch die Eingangsgrößen weitere unsichere Informationen zugeführt werden. Bereits vorhandene Zustandsunsicherheit kann sich nicht mehr zurückbilden. Das System (4.11) ist grenzstabil, wenn die Systemmatrix \mathbf{A} diagonalähnlich ist und für ihre Eigenwerte $|\lambda_n| = 1$ gilt [82, S. 464].

Instabilität ist gegeben, wenn das System weder asymptotisch noch grenzstabil ist. Bei Instabilität wächst die vorhandene Zustandsunsicherheit im Laufe der Zeit selbst dann über alle Grenzen, wenn der Verlauf der Eingangswerte $\bar{\mathbf{x}}$ exakt bekannt sind.

Gleichgewicht der Zustandsunsicherheit. Für eine konstante Eingangsunsicherheit $\widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{x}}}$ stellt sich bei einem asymptotisch stabilen System der Form (4.11) ein Gleich-

gewicht bzgl. der Zustandsunsicherheitsmatrix ein. Der Zustandsunsicherheitsvektor $\text{vec}\{\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}\}(k)$ stellt einen Gleichgewichtszustand dar, falls

$$\text{vec}\{\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}\}(k+1) = \text{vec}\{\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}\}(k) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\text{vec}\{\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{z}}}\}(k) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\text{vec}\{\widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{x}}}\} \quad (4.13)$$

gilt. Durch Umstellen von Gleichung (4.13) kann der Gleichgewichtszustand

$$\text{vec}\{\widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{z}}}\} = (\mathbf{I} - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\text{vec}\{\widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{x}}}\} \quad (4.14)$$

direkt berechnet werden. Aus dem Gleichgewichtszustand $\text{vec}\{\widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{z}}}\}$ kann die sich einstellende Zustandsunsicherheitsmatrix durch Zurücktransformieren gewonnen werden, indem die Vektorelemente der Reihe nach spaltenweise in eine $(N \times N)$ -Matrix geschrieben werden. Die korrespondierende Unsicherheitsmatrix der Messgrößen kann anschließend durch die Anwendung von Gleichung (4.9) bestimmt werden.

4.3.4 Zusammenfassung

Wie in den vorangegangenen Unterabschnitten aufgezeigt wurde, entspricht der bei vielen Anwendungen vorliegende Messprozess oft nicht der Klasse von Messprozessen die im GUM-Leitfaden betrachtet wird. Daher sind die dargestellten modifizierten bzw. erweiterten Verfahren bei der Messunsicherheitsbeurteilung zu nutzen. Abbildung 4.2 bietet eine zusammenfassende Entscheidungshilfe, welche Art von Verfahren für die Beurteilung des vorliegenden Messprozesses genutzt werden kann. Falls die Messung ausschließlich mittels zeitinvarianter Größen modelliert werden kann, wird je nach Ausprägung der Linearitätseigenschaft das Standard-GUM-Verfahren bzw. das Monte-Carlo-Verfahren verwendet. Andernfalls ist das Vorhandensein der Dynamik zu prüfen. Bei einem statischen Messsystem mit zum Teil konstanten Messbedingungen ist der GUM-Ansatz (iterativ) anzuwenden, wobei gegebenenfalls zufällige Einflüsse als Rauschprozess zu berücksichtigen sind. Das Ergebnis der Messunsicherheitsbeurteilung ist in jedem Zeitschritt unabhängig von den vorangegangenen Ergebnissen.

Im Falle eines dynamischen Messsystems ist das zuvor entwickelte dynamische GUM-Verfahren anzuwenden, wobei sich dieses im linearen Fall dahingehend vereinfacht, dass die Sensitivitätsmatrizen nur einmalig bestimmt werden müssen. Das Ergebnis der Messunsicherheitsbeurteilung wird von den vorangegangenen Ergebnissen beeinflusst.

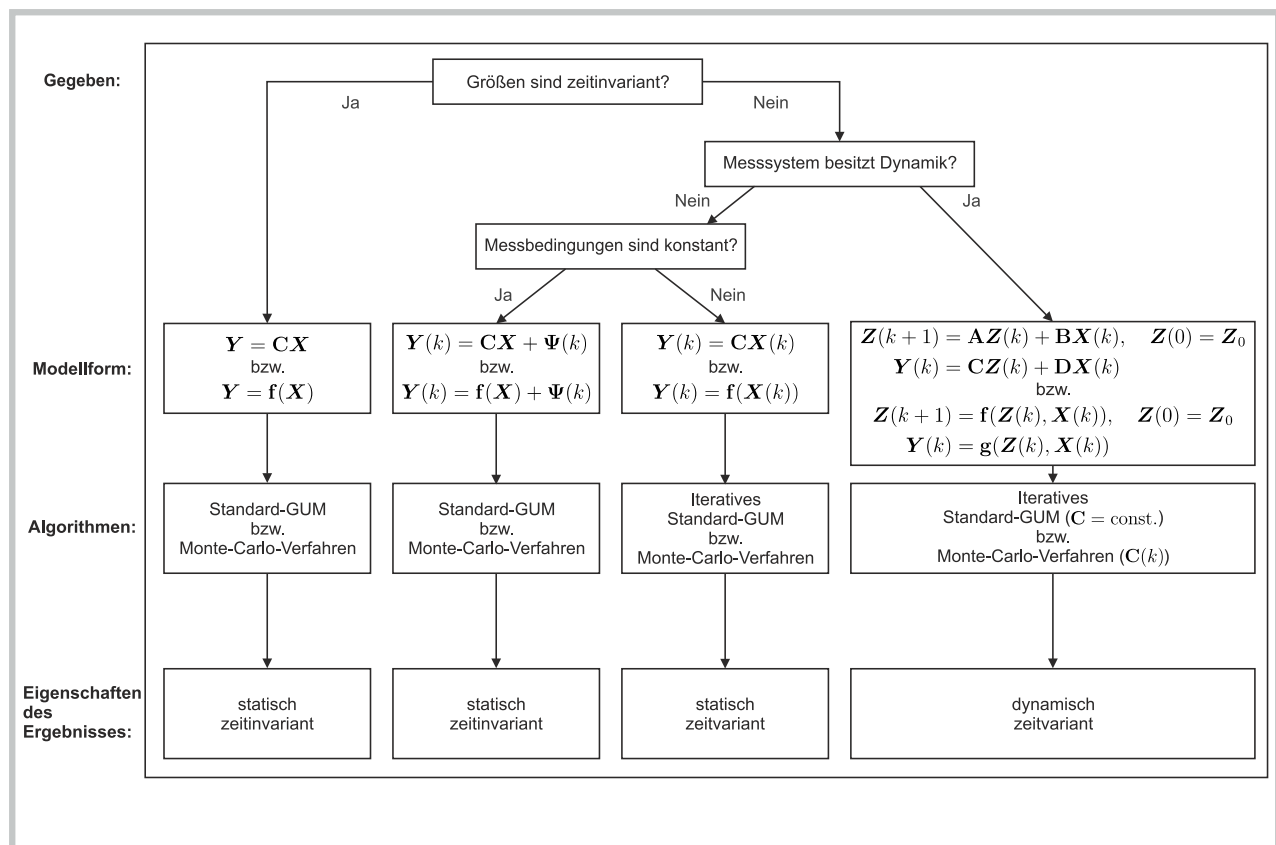


Abbildung 4.2: Entscheidungsbaum zur Auswahl des geeigneten Beurteilungsverfahrens

4.3.5 Beispiele zur Beurteilung der Messunsicherheit bei linearen dynamischen Messsystemen

Im Folgenden wird die Beurteilung der Messunsicherheit bei dynamischen Messsystemen anhand zweier Beispiele demonstriert. Sowohl die Filterung als auch die Integration von Messwerten stellen typische Bestandteile von Messprozessen dar und weisen die in diesem Abschnitt beschriebenen Verhaltenseigenschaften auf.

Beispiel 1 Tiefpassfilter. Das einfachste Beispiel zur Tiefpass-Filterung stellt das PT₁-Glied dar, das durch das kontinuierliche Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= -\frac{1}{T_1}Z(t) + \frac{1}{T_1}X(t), \quad Z(0) = Z_0 \\ Y(t) &= k_s Z(t),\end{aligned}$$

mit seinen Parametern – der Zeitkonstante T_1 und der statischen Verstärkung k_s – beschrieben wird. Die Abtastung mit der Abtastperiode T führt auf die Parameter

$$\mathbf{A} = e^{-\frac{T}{T_1}} = \alpha$$

bzw.

$$\mathbf{B} = \int_0^T e^{-\frac{\tau}{T_1}} d\tau \frac{1}{T_1} = 1 - \alpha$$

des zeitdiskreten Modells. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}Z(k+1) &= \alpha Z(k) + (1 - \alpha)X(k), \quad Z(0) = Z_0 \\ Y(k) &= k_s Z(k).\end{aligned}$$

Abbildung 4.3 zeigt den Verlauf der zu filternden Messgröße, die als Eingangsgröße $X(k)$ dem Tiefpass-Filter zugeführt wird. Den Messwerten wird zunächst die aus einer Messunsicherheitsbeurteilung bekannte Eingangsunsicherheit $u_{\bar{x}} = 1$ beigeordnet. Ab dem Zeitpunkt $k = 40$ stehen die Messwerte beispielhaft mit einer geringeren Eingangsunsicherheit von $u_{\bar{x}} = 0,3$ zur Verfügung.

Die Tiefpass-Filterung mit den Parametern $T_1 = 10$ s, $k_s = 1$ und $T = 1$ s liefert das in Abbildung 4.4 dargestellte Ergebnis. Intuitiv ließe sich vermuten, dass die Messunsicherheit im Filter immer weiter ansteigt, da das Tiefpass-Filter mit immer weiteren unsicheren Messwerten gespeist wird. Es zeigt sich jedoch, dass sich die bereits im Filtersystem vorhandene Zustands- bzw. Messunsicherheit ab dem Zeitpunkt $k = 40$ wieder abbaut. Dies liegt darin begründet, dass das PT₁-Glied für jede Parametrierung stabil ist. Die im Zustand enthaltene Wirkung der anfänglichen, mit großer Unsicher-

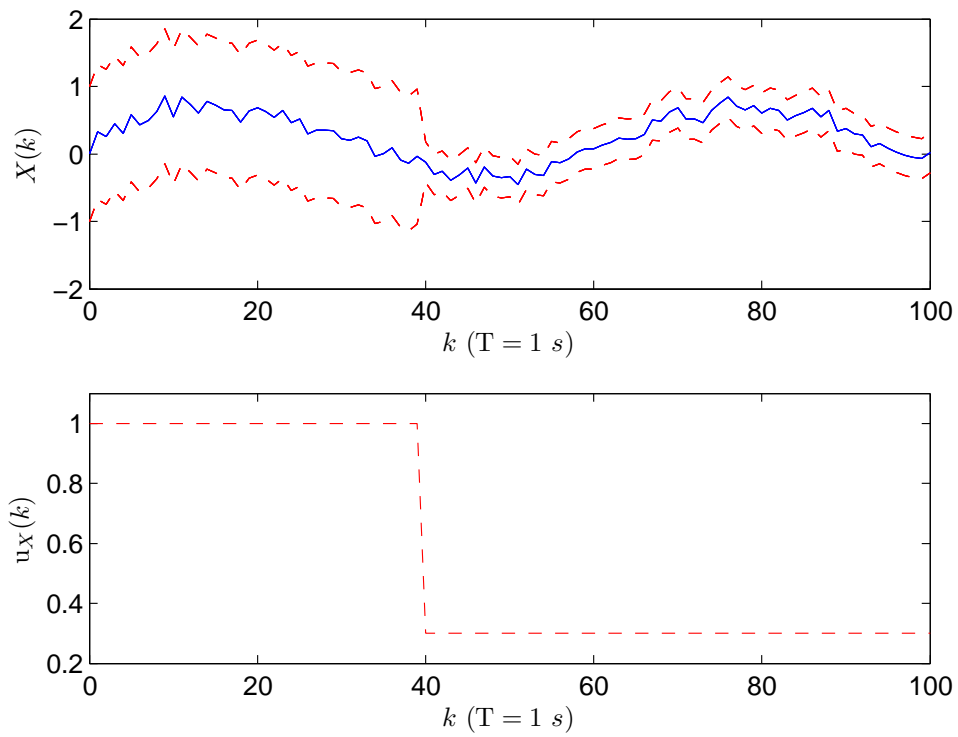


Abbildung 4.3: Verlauf der zu filternden Eingangsgrößenwerte und ihrer Messunsicherheit

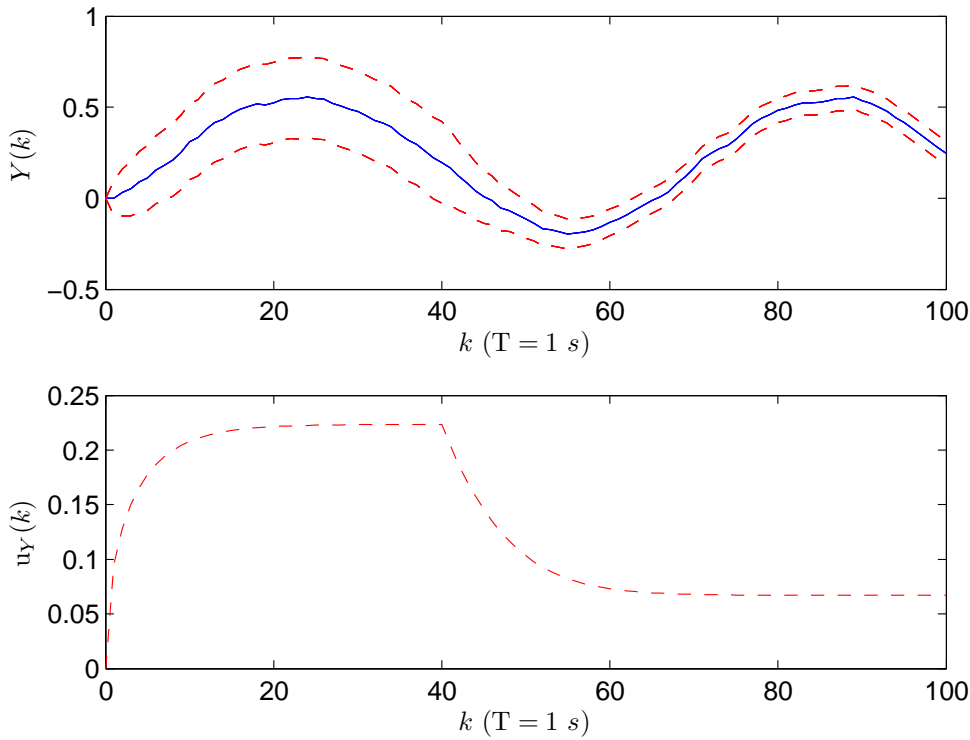


Abbildung 4.4: Verlauf der gefilterten Eingangsgrößenwerte und ihrer Messunsicherheit

heit behafteten Eingangswerte lässt im Laufe der Zeit nach und wird von der Wirkung der späteren Eingangswerte mit geringerer Unsicherheit dominiert.

Da die Eigenbewegung des Filtersystems abklingt und die Messunsicherheit der Eingangswerte konstant ist, stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der dem System durch die Eingangsgrößen neu hinzugeführten Unsicherheit und der vom System abgebauten Zustandsunsicherheit ein. Der nach Gleichung (4.14) analytisch berechnete Gleichgewichtszustand für $k \gg 40$

$$\begin{aligned} \text{vec} \{ \widehat{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{z}}} \} &= \hat{u}_{\bar{\mathbf{z}}}^2 = (1 - \alpha^2)^{-1} \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot 0,3^2 \\ &\Rightarrow \hat{u}_{\bar{\mathbf{y}}} = k_s^2 \hat{u}_{\bar{\mathbf{z}}} = \sqrt{\hat{u}_{\bar{\mathbf{z}}}^2} = 0,067 \end{aligned}$$

stimmt mit dem Ergebnis der Simulation überein (vgl. Abbildung 4.4).

Beispiel 2 Doppelintegrator. Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist die Messung der zurückgelegten Distanz eines Fahrzeugs bei einer Geradeausfahrt mit Hilfe von Beschleunigungssensoren. Zur Verbesserung der gemessenen Beschleunigungswerte werden zwei identische Beschleunigungssensoren (A_1 bzw. A_2) parallel eingesetzt. Aus der

mittleren Beschleunigung wird die zurückgelegte Distanz durch doppelte Integration bestimmt. Das Messmodell lautet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Z}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{I2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(t) \\ S(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T_{I1}}{2} & \frac{T_{I1}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \\ Y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(t),\end{aligned}$$

wobei die zurückgelegte Distanz $S(t)$ und die Geschwindigkeit des Fahrzeugs $V(t)$ als Zustandsgrößen auftreten. Die Zeitdiskretisierung mit $T = T_{I1} = T_{I2} = 1$ führt auf das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(k) \\ S(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(k) \\ A_2(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 \\ Y(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(k)\end{aligned}$$

des MISO-Systems.

Abbildung 4.5 zeigt den Verlauf der gemessenen Beschleunigungswerte beider Sensoren. Da beide Sensoren als baugleich angenommen werden, weisen sie die gleiche Messunsicherheit auf. Die damit verbundene hohe Korrelation der Messwerte sei mit dem Korrelationskoeffizienten $r_{\bar{a}_1, \bar{a}_2} = 0,75$ abgeschätzt. Zur Demonstration sei angenommen, dass ab dem Zeitpunkt $k = 70$ eine ideale Messung durchgeführt wird, d. h. die Beschleunigungswerte keine Messunsicherheit mehr aufweisen.

Die erste Integration der Eingangswerte führt auf den Verlauf der Geschwindigkeit (Abbildung 4.6). Zu Beginn der Messung befindet sich das Fahrzeug in Ruhe. Der entsprechende Anfangszustand ist in den Abbildungen jeweils mit einer Raute markiert. Die Unsicherheit der Geschwindigkeit nimmt wie erwartet zu und zeigt ab $k = 70$ ein grenzstabiles Verhalten.

Die erneute Integration liefert die Werte der Messgröße *Distanz*. Die geschätzte Anfangsdistanz zum Koordinatenursprung beträgt $\bar{s}(0) = 50$ m. Die der Anfangsdistanz beigeordnete Standardunsicherheit ist $u_{\bar{s}}(0) = 5$ m. Die der Ausgangsgröße beigeordnete Messunsicherheit wächst über alle Grenzen an. Das System ist aufgrund der nicht diagonalähnlichen Systemmatrix \mathbf{A} insgesamt instabil.

Die vorangestellten Beispiele repräsentieren zwei typische Anwendungsfälle aus der Fahrzeugtechnik. Reale Messsignale sind stets verrauscht und es bedarf üblicherweise einer Glättung des Signals. Dies wird mit Hilfe von Filtern erreicht, wobei das hier diskutierte PT₁-Glied eine der einfachsten Tiefpassfilterrealisierung darstellt. Das zweite Beispiel illustriert die Problematik des häufig angewendeten Prinzips, die Fahrzeuggeschwindigkeit und die Position mit Hilfe von Beschleunigungssensoren zu bestimmen.

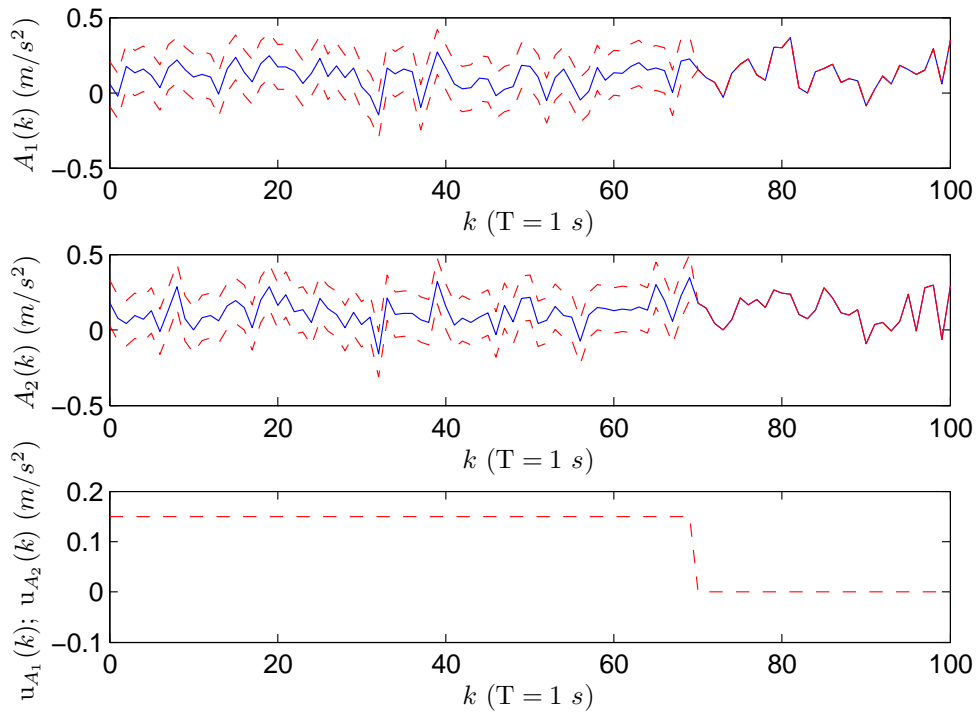


Abbildung 4.5: Verlauf der gemessenen Beschleunigungswerte und ihrer Messunsicherheit

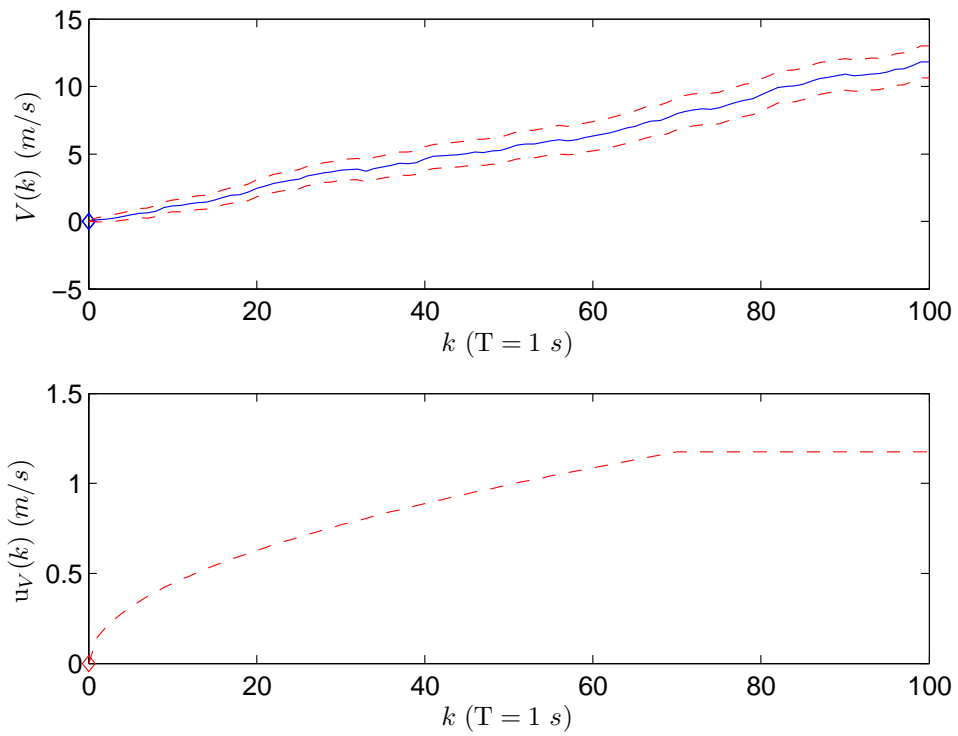


Abbildung 4.6: Verlauf der Geschwindigkeit und ihrer Messunsicherheit

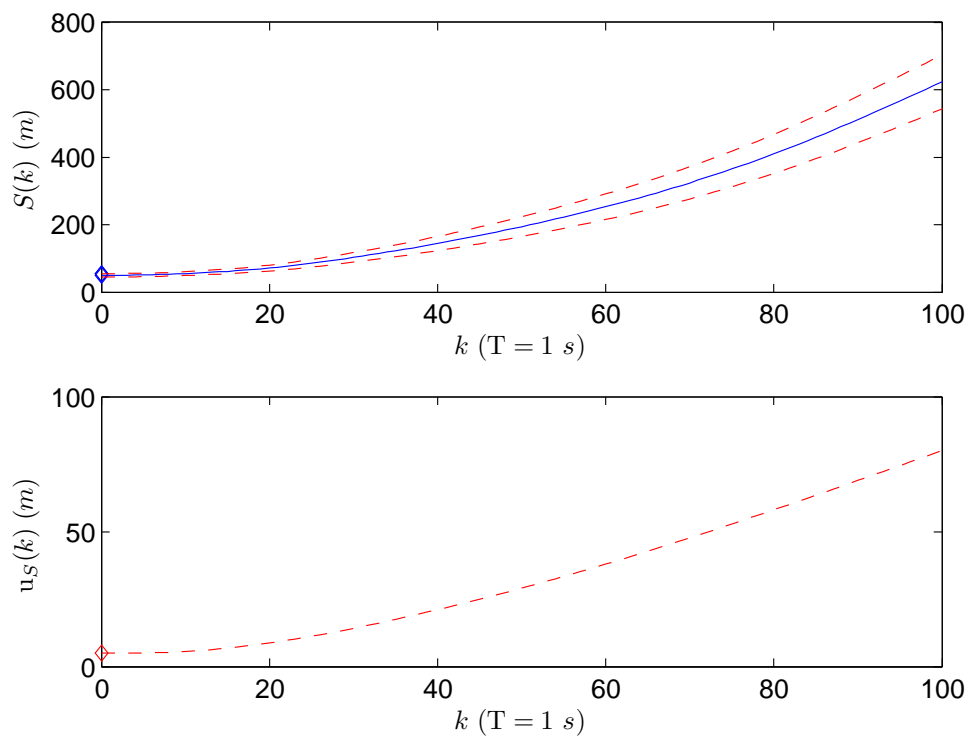


Abbildung 4.7: Verlauf der zurückgelegten Distanz und ihrer Messunsicherheit

Die indirekten Messgrößen *Geschwindigkeit* und *Position* werden dabei aus der gemessenen und folglich mit einer Messunsicherheit behafteten Beschleunigung mittels Integration bestimmt. Es tritt eine Drift auf, d. h. die Messunsicherheit nimmt mit der Zeit immer weiter zu, wie die Abbildungen 4.6 und 4.7 zeigen.

KAPITEL 5

Entwicklung und Beurteilung eines Ortungsnormal für den Straßenverkehr

Aus der Definition der Messabweichung in Kapitel 2.2 und ihrer Bestimmung lässt sich unmittelbar schließen, dass die Beurteilung von Fahrzeugortungssystemen prinzipiell ein „Urnormal“ bedingt, das als Referenz herangezogen werden kann. Diese Referenz muss die Messung einer sich bewegenden Position und die Vermessung ortsfester Positionen verknüpfen. Ortsfeste Positionen können bereits mittels den existierenden Methoden der Geodäsie mit einer für die Fahrzeugortung hinreichend hohen Qualität vermessen werden. Darauf aufbauend müssen die zusätzlichen Einflüsse auf die Fahrzeugpositionsmessung infolge der Fahrzeugbewegung bei der Messunsicherheitsbeurteilung des Normal nach dem in Kapitel 3 bzw. Kapitel 4 vorgestellten Verfahren Berücksichtigung finden, um so letztlich auf die Messqualität der Fahrzeugortung schließen zu können. Durch diesen Ansatz ist die metrologische Rückführbarkeit der Fahrzeugortung auf die Vermessung ortsfester Positionen gewährleistet.

Dieses Kapitel beschreibt einen Referenzmessaufbau, welcher in der vorliegenden Arbeit als Normal für die Ortung von Straßenfahrzeugen herangezogen wird. Abschnitt 5.1 erläutert zunächst die Systemarchitektur und das Konzept der verwendeten Datenfusion. Anschließend wird die Messqualität dieser Referenz detailliert – nach ihren einzelnen Qualitätseigenschaften aufgeschlüsselt (vgl. Abschnitt 2.3) – beurteilt. Dabei wird in Abschnitt 5.2 besonderes Augenmerk auf die Beurteilung der Messunsicherheit gelegt,

deren Ergebnisse in Abschnitt 5.3 mittels einer Monte-Carlo-Simulation verifiziert werden. Die Beurteilung der weiteren Qualitätseigenschaften wird in Abschnitt 5.4 anhand einer exemplarischen Messfahrt durchgeführt.

5.1 Messaufbau und Datenfusion des Referenzsystems

In diesem Abschnitt wird zunächst der Messaufbau des Referenzsystems für die Verifizierung von Fahrzeugortungssystemen vorgestellt. Die Beschreibung des Messaufbaus gliedert sich dabei in die streckenseitige Infrastruktur sowie in das Prüffahrzeug und die darin integrierte Mess- und Rechentechnik. Anschließend wird das Konzept der Datenfusion erläutert.

5.1.1 Messaufbau des Referenzsystems

Auf dem Gelände der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig wurde ein 860 m langer Straßenabschnitt als Prüffeld ausgewählt (Abbildung 5.1 [141]). Bisherige Untersuchungen [157, 15] haben gezeigt, dass sich zur Vorgabe von zu verfolgenden Strecken Permanentmagnete gut eignen, deren Magnetfeld vom Fahrzeug während der Überfahrt erfasst wird. Dieses im PATH-Projekt entwickelte und wohlerprobte Prinzip wurde auch bei diesem Messaufbau angewendet. Um eine ausreichende Feldstärke zur Detektion der Magnete zu gewährleisten, wurden im Rahmen des Gemini-Projekts [57] jeweils vier zylinderförmige Magnete übereinander zu Magnetpaketen zusammengefasst und 5 cm tief in die Fahrbahn eingelassen. Die Distanz zwischen den einzelnen Magnetpaketen beträgt 50 cm, was in Abbildung 5.1 symbolisch angedeutet ist. Mit diesen diskreten Markierungen wird die Prüfspur definiert, der das Prüffahrzeug folgen soll. Bei jedem vierzigsten Magnetpaket wurde ein Referenzmesspunkt definiert und durch das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der TU Braunschweig im Koordinatensystem WGS84 (World Geodetic System 1984) georeferenziert.

Ein weiterer wesentlicher Bestandteil des Referenzsystems ist das am Institut für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik aufgebaute Prüffahrzeug *Carla* (Computer assisted road lab). Die Fahrzeugposition ist dabei durch die Mitte eines auf dem Dach angebrachten Reflektors oder durch das Phasenzentrum der verwendeten Antenne definiert. Im Folgenden wird von der Verwendung einer Antenne ausgegangen, wie es bei der Prüfung eines satellitenbasierten Ortungssystems der Fall ist. Die Komponenten des Referenzsystems sind in Abbildung 5.2 (nach [141]) dargestellt und werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

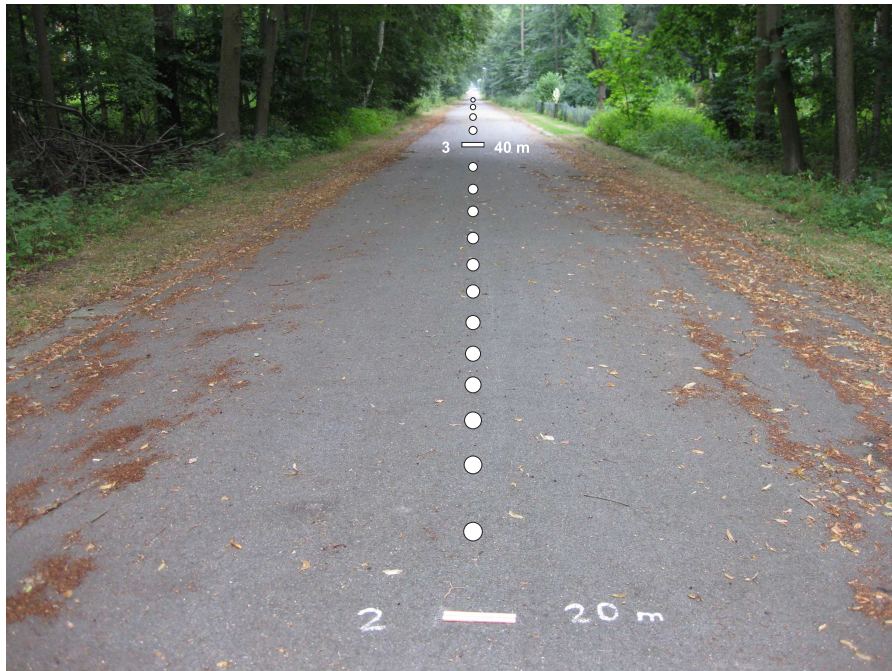


Abbildung 5.1: Prüfspur auf dem Gelände der PTB

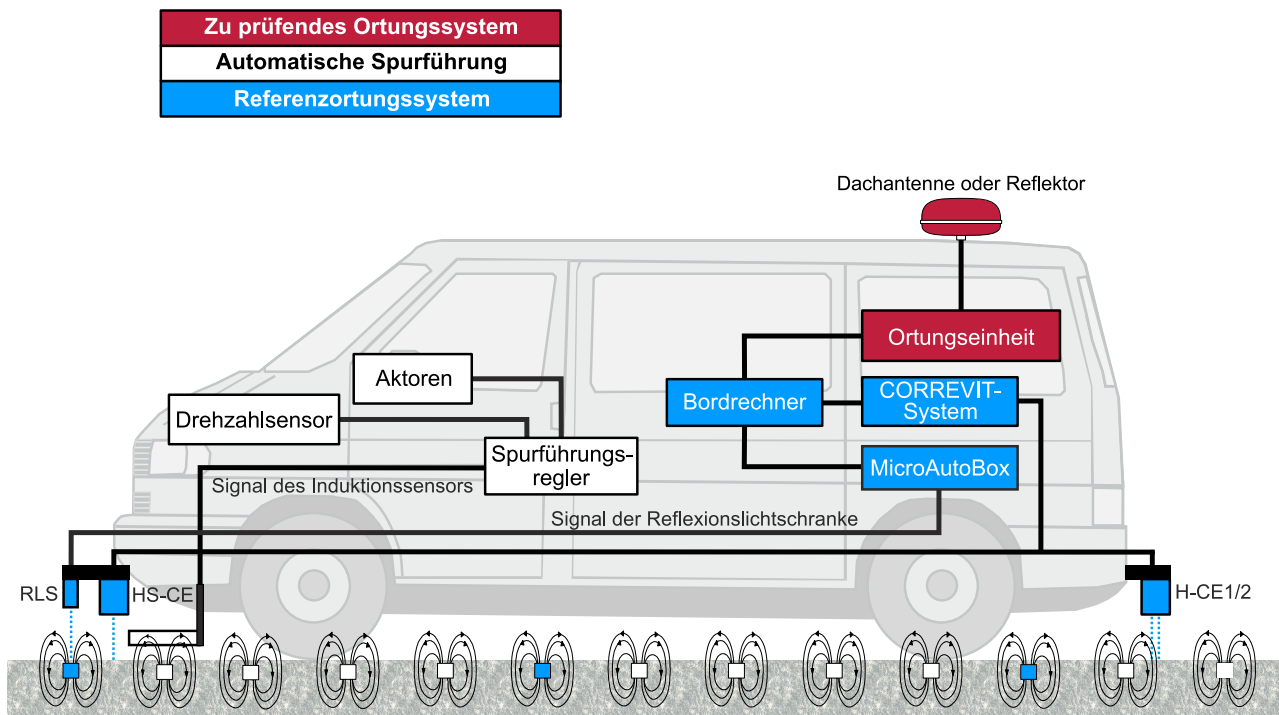


Abbildung 5.2: Strecken- und fahrzeugseitige Komponenten des Referenzsystems

Automatische Querregelung. Im Gegensatz zum spurgebundenen Verkehr, bei dem die Querabweichung durch die Gleise begrenzt wird, muss die Querdynamik eines Straßenfahrzeugs hochgenau der definierten Prüftrajektorie nachgeführt werden. Da diese Aufgabe nicht hinreichend genau von einem menschlichen Fahrzeugführer ausgeführt werden kann, wurde eine Querdynamik-Regelung auf Basis der *Quantitative Feedback Theory* (QFT) entworfen, die eine Querführung innerhalb eines ± 2 cm-Intervalls sicherstellt [50]. Die Bestimmung der Querablage wird durch einen Induktionssensor durchgeführt, der an der Fahrzeugfront angebracht ist. Auf Basis dieser ermittelten Querablage berechnet die Querdynamik-Regelung den Wert für die Stellgröße *Lenkwinkel*, der mit Hilfe eines Lenkaktors umgesetzt wird.

Automatische Längsregelung. Für die Einhaltung des Geschwindigkeitsprofils wurde eine H_∞ -optimale Längsdynamik-Regelung entwickelt, deren grundsätzliche Entwurfsmethode in [38] aufgezeigt wird. Die Längsdynamik-Regelung nutzt den Induktionssensor zur Bestimmung der Längsgeschwindigkeit. Als Stellgröße im Längsdynamik-Regelkreis wird die Gaspedalstellung verwendet. Zusätzlich sind Algorithmen zum automatischen Anfahren und automatischen Gangwechsel implementiert, welche sich auf das Signal des Drehzahlsensors stützen.

Messinstrumente des Referenzortungssystems. Die Referenzmesspunkte sind mit im Straßenbelag versenkten Schrauben markiert. Zur optischen Erfassung der Referenzmesspunkte dienen ausgelegte Reflexionsstreifen, die mittels einer an der Fahrzeugfront angebrachten Reflexionslichtschranke (RLS) (Modell: PRK 25/66.2) der Fa. Leuze electronic detektiert werden. Hierdurch werden die Zeitpunkte des Überfahrens der Referenzmesspunkte bestimmt. Die Referenzmesspunkte sind in Abbildung 5.2 durch ausgefüllte Magnetpakete symbolisiert. Neben der Erfassung der Referenzmesspunkte müssen zur Generierung der Referenzposition Schwimm-, Nick- und Wankwinkel gemessen werden, da diese Winkel einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Antennenposition haben. Für deren schlupffreie Messung wird ein CORREVIT-Messsystem der Fa. CORRSYS DATRON Sensorsysteme eingesetzt. Das CORREVIT-System besteht aus dem HS-CE-Sensor an der Fahrzeugfront und den Sensoren HS-E1 und HS-E2 am Fahrzeugheck, welche jeweils die Abstände zur Fahrbahnoberfläche mit einer Messrate von 250 Hz messen. Hierdurch ist die Pose des Fahrzeugs eindeutig bestimmbar. Durch die absoluten Messungen der Reflexionslichtschranke und des CORREVIT-Systems wird die Drift vermieden, wie sie bei integrierenden Inertialnavigationssystemen (INS) auftritt. Diese, per Konstruktion erzwungene Unabhängigkeit der Einzelmessungen und die damit verbundene gleichbleibende Qualität der Messungen, ist eine bedeutsame Voraussetzung für die Messunsicherheitsbeurteilung nach [29].

Rechnerkomponenten des Referenzortungssystems. Als Speicher- und Steuerungseinheit des Referenzortungssystems dient ein Bordrechner, welcher neben den Messdaten des zu verifizierenden Ortungssystems auch die des CORREVIT-Systems aufzeichnet. Da der instantanen Erfassung der Referenzmesspunkte eine hohe Bedeutung zukommt, wird das Messsignal der Reflexionslichtschranke mittels einer MicroAutoBox (Modell: ds1401/1505/1506) der Fa. dSPACE aufgenommen. Bei der MicroAutoBox handelt es sich um einen eingebetteten Rechner mit Echtzeitbetriebssystem. Zu Beginn der Messfahrt wird eine Synchronisation der Zeitbasen vom Bordrechner und der MicroAutoBox durchgeführt, sodass alle Messwerte mit einem konsistenten Zeitstempel versehen werden.

5.1.2 Datenfusion des Referenzsystems

Abbildung 5.3 skizziert das Konzept der Datenfusion für ein zu prüfendes Ortungssystem allgemeiner Art [142]. Die Einteilung von links nach rechts in *Vorverarbeitung*, *Messprozess* und *Nachbearbeitung* visualisiert den zeitlichen Ablauf der Fusion.

Während der Vorverarbeitung werden die aus der Georeferenzierung bekannten und in einer digitalen Karte gespeicherten Koordinaten der Referenzmesspunkte zur einfacheren Auswertung in Gauß-Krüger-Koordinaten transformiert. Anschließend erfolgt eine weitere Transformation in ein kartesisches Strecken-Koordinatensystem, bei dem die X -Achse in Fahrtrichtung und die Y -Achse quer zur Fahrtrichtung zeigt. Dies befindet sich bzgl. der Orientierung bei einer Geradeausfahrt im Einklang mit dem Fahrzeug-Koordinatensystem nach DIN 70000 [21]. Zur Unterscheidung vom Gauß-Krüger-System, bei dem der Rechtswert mit y und der Hochwert mit x bezeichnet wird, werden die Koordinaten des Strecken-Koordinatensystems mit X und Y bezeichnet. Damit stehen die Koordinaten der Referenzmesspunkte für die spätere Auswertung in geeigneter Form zur Verfügung.

Während des Messprozesses werden die aus der Fahrzeugdynamik resultierenden zeitvarianten Größenwerte erfasst. Zum einen wird die Position des Fahrzeugs durch das zu prüfende Ortungssystem gemessen. Das Resultat der Messung sind die Werte (a,b) im systemeigenen Koordinatensystem, welche beispielsweise eine zweidimensionale Position oder Winkel und Entfernung zwischen einem extern installierten Ortungssystem und dem Fahrzeug darstellen. Zum anderen bestimmt das CORREVIT-System den Schwimmwinkel β , den Nickwinkel θ und den Wankwinkel φ . Des Weiteren wird mit der Reflexionslichtschranke der Zeitpunkt t_k des Überfahrens des k -ten Referenzmesspunktes erfasst.

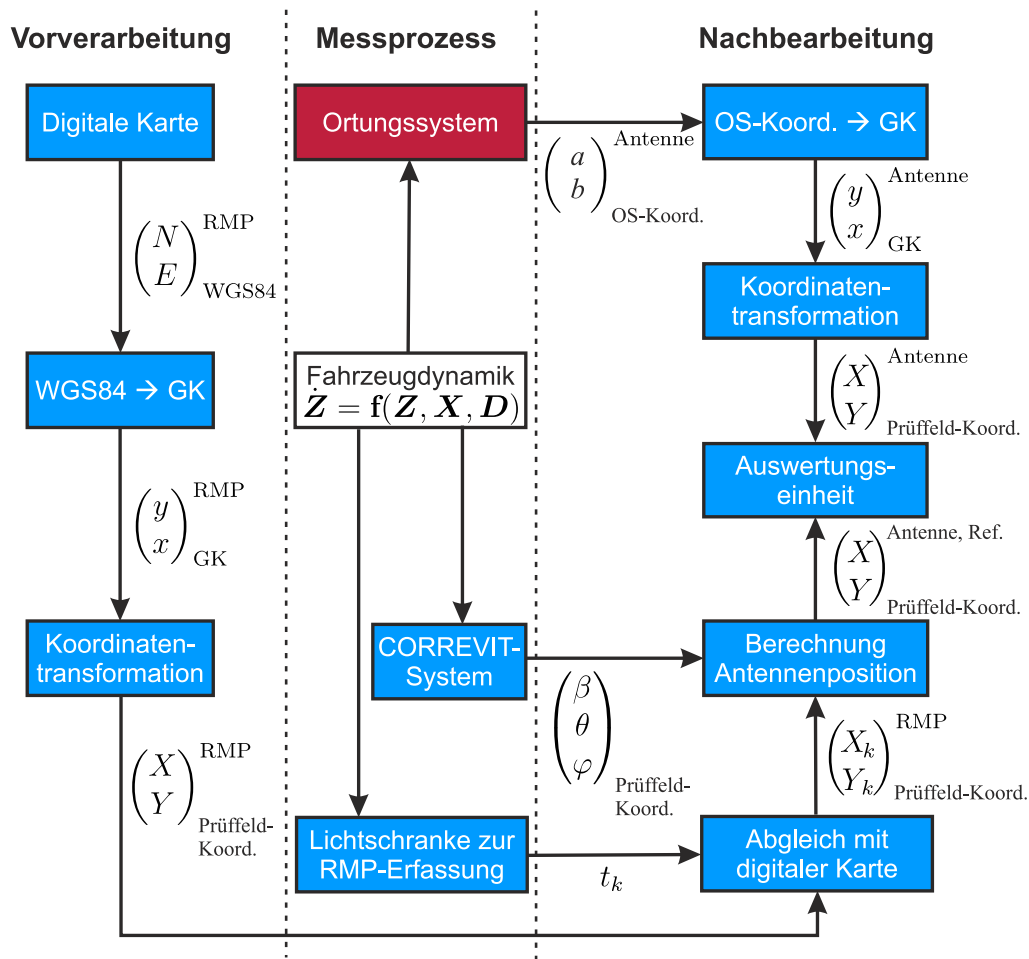


Abbildung 5.3: Konzept der Datenfusion des Referenzsystems

Bei der Nachbearbeitung werden die Messwerte (a,b) in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem umgerechnet. Somit kann anschließend die identische Transformation in das auf das Prüfgelände bezogene (X,Y) -Koordinatensystem durchgeführt werden wie bei der Vorverarbeitung. Mit Hilfe der digitalen Karte werden die Koordinaten der Referenzmesspunkte den Zeitpunkten zugeordnet, an denen das Fahrzeug die Referenzmesspunkte passiert hat. Anschließend werden die Referenzpositionen unter Berücksichtigung der Schwimm-, Nick- und Wankbewegung berechnet. Das Referenzpositionssignal wird interpoliert, was einen Vergleich der zu prüfenden Antennenposition und der Referenzposition zu den Zeitpunkten ermöglicht, an denen das zu prüfende Ortungssystem Messwerte bereitstellt.

5.2 Messunsicherheitsbeurteilung des Referenzsystems

In den folgenden Unterabschnitten wird die Beurteilung der Messunsicherheit des zuvor beschriebenen Referenzsystems in Anlehnung an die Ausführungen in [136] dargestellt. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei strikt an den in Abschnitt 3.2 vorgestellten Schritten des Standard-GUM-Verfahrens.

5.2.1 Schritt I: Beschreibung der Messung

Die Messaufgabe besteht in der Ermittlung des Ortsvektors \mathbf{R} der auf dem Dach des Prüffahrzeugs montierten Antenne während einer Fahrt auf dem PTB-Prüfgelände. Hierbei wird, wie im Bereich des Straßenverkehrs üblich, die X - und die Y -Koordinate betrachtet, sodass eine vektorielle Messgröße ermittelt werden muss. Das genutzte Messprinzip ist zum einen die optische Erfassung eines Referenzmesspunkts (RMP) mittels Lichtreflexion. Zum anderen wird das gitteroptische Prinzip zur Bestimmung der Fahrdynamikwinkel genutzt. Bei der Messmethode handelt es sich um eine indirekte Messung der Referenzposition durch das Referenzsystem. Das Messverfahren wird im

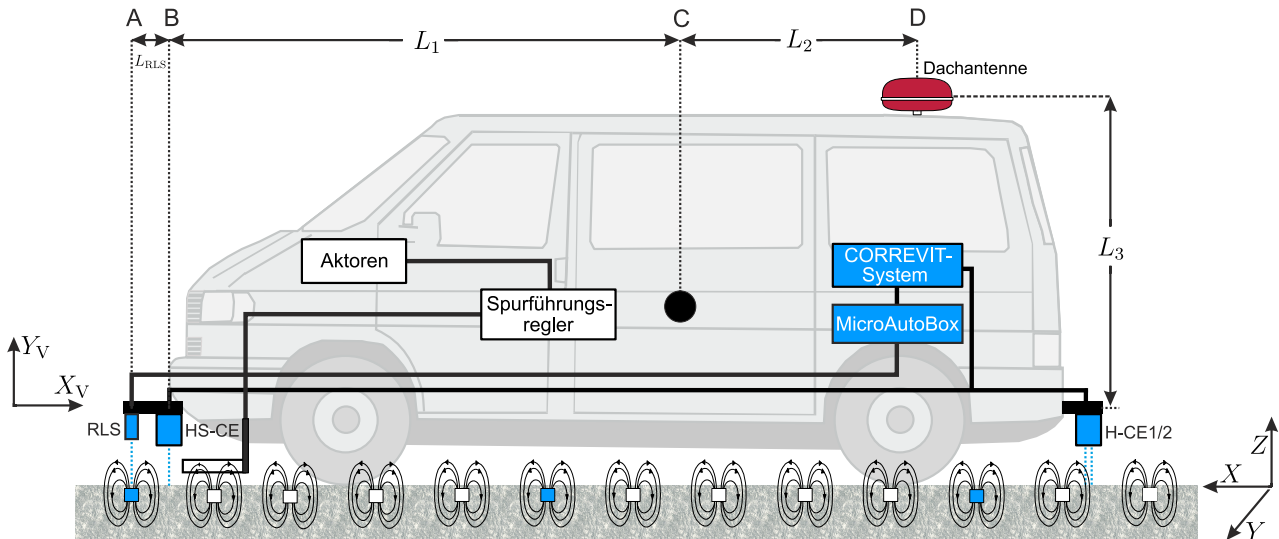


Abbildung 5.4: Geometrie des Messaufbaus

Folgenden anhand von Abbildung 5.4 erläutert. Die Fahrzeugregelung stellt mit Hilfe der im Boden eingelassenen Magnetpakte und des Induktionssensors sicher, dass das

Fahrzeug näherungsweise entlang der Prüftrajektorie geführt wird. Die Prüftrajektorie ist im (X, Y) -Koordinatensystem des Prüffeldes definiert. Dabei zeigt die X -Achse in Fahrtrichtung und die Y -Achse quer zur Fahrtrichtung. Auf den Referenzmesspunkten wird mittig jeweils ein 20 cm x 1 cm großer Markierungsstreifen ausgelegt, der mit einer Reflexionsfolie beklebt ist und so von der Reflexionslichtschranke erfasst werden kann. Auf Basis der bekannten Fahrzeuggeometrie wird mittels einer Transformation der Koordinaten des erfassten Referenzmesspunkts die Position der Dachantenne berechnet. Die dabei genutzten Geometrieparameter im (X_V, Y_V) -Koordinatensystem sind der Abstand L_{RLS} der Reflexionslichtschranke (Position A) zum HS-CE-Sensor (Position B), die Größe L_1 , die den horizontalen Abstand des HS-CE-Sensors vom Fahrzeugdrehpunkt (Position C) bezeichnet, der horizontale Abstand L_2 zwischen dem Fahrzeugdrehpunkt und der Antennenposition (Position D) sowie der vertikale Abstand L_3 zwischen der Antenne und den CORREVIT-Sensoren.

Durch die Unabhängigkeit der Einzelmessungen an den verschiedenen Referenzmesspunkten wird sichergestellt, dass das Referenzsystem an jedem Referenzmesspunkt dieselbe Messunsicherheit aufweist. Unsicherheitsbeiträge, die aus der unterschiedlichen Annäherung des Messfahrzeugs an die Referenzmesspunkte resultieren, werden bei der Messunsicherheitsbeurteilung berücksichtigt.

5.2.2 Schritt II: Modellierung der Messung

Zum Zeitpunkt einer detektierten Referenzpunktüberfahrt befindet sich die Lichtschranke genau über der optischen Markierung der per Definition festgelegten Idealposition $(x_{\text{def}}, 0)$. Die Position der Lichtschranke muss unter Berücksichtigung der Fahrzeugorientierung und der Fahrzeuggeometrie in die Position \mathbf{R} der Dachantenne überführt werden. Die dafür notwendige Koordinatentransformation wurde im Rahmen des Gemini-Projekts [141] hergeleitet. Die nichtlineare Messfunktion lautet

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -L_1 \cos \beta - L_2 \cos \theta \cos \beta + L_3(\cos \varphi \sin \theta \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta) - L_{RLS} + X_{\text{def}} \\ -L_1 \sin \beta - L_2 \cos \theta \sin \beta + L_3(\cos \varphi \sin \theta \sin \beta - \sin \varphi \cos \beta) + Y_{\text{def}} + Y_{\text{vc}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_S + X_M + X_\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

wobei $(X_{\text{def}}, Y_{\text{def}})$ die per Definition festgelegte Position des betrachteten Referenzpunktes ist. Die Größe X_S symbolisiert zum einen die Schwierigkeit, die auf der digitalen Karte definierten Prüfkoordinaten auf dem realen Prüffeld mittels einer im Asphalt zu versenkenden Schraube möglichst genau zu kennzeichnen. Zum anderen wird diese Schraube durch einen möglichst genau auszulegenden Reflexionsstreifen optisch markiert, dessen unsichere X -Koordinate durch die Größe X_M repräsentiert wird. Die tatsächlich vom Referenzsystem erfassbare Position $(X_{\text{eff}}, Y_{\text{eff}})$ unterscheidet sich daher

Tabelle 5.1: Definition aller relevanten Größen

Größe	Bedeutung
\mathbf{R}	(X,Y) -Position der Dachantenne
L_1	Horizontalabstand zwischen vorderem CORREVIT-Sensor und Fahrzeugdrehpunkt
L_2	Horizontalabstand zwischen Fahrzeugdrehpunkt und Dachantenne
L_3	Vertikalabstand zwischen CORREVIT-Sensoren und Dachantenne
L_{RLS}	Horizontalabstand zwischen vorderem CORREVIT-Sensor und Reflexionslichtschranke
β	Schwimmwinkel
θ	Nickwinkel
φ	Wankwinkel
X_{S}	Durch ungenaue Platzierung der RMP-Markierungsschraube verursachter Einfluss auf die X -Koordinate
X_{M}	Durch ungenaue Platzierung des Schrauben-Markierungsstreifens verursachter Einfluss auf die X -Koordinate
X_{τ}	Durch die Zeitverzögerung der RMP-Detektion verursachter Einfluss auf die X -Koordinate
X_{def}	Per Definition festgelegte X -Koordinate
Y_{def}	Per Definition festgelegte Y -Koordinate
Y_{vc}	Durch die Fahrzeugregelung verursachte Querabweichung

bzgl. der X -Koordinate um die zwei Einflüsse X_{S} und X_{M} . Die optische Erfassung und das Abspeichern des Messsignals führt auf eine Zeitverzögerung τ , die äquivalent zu einer Positionsunsicherheit X_{τ} ist. Zusätzlich hat die unvermeidliche Regelabweichung in Querrichtung Y_{vc} einen Einfluss auf die Y -Koordinate. Die Bestimmung der Y -Koordinate wird ebenfalls durch die unsichere Messung der Fahrzeugorientierung und der Fahrzeuggeometrie beeinflusst. Die zur Modellierung verwendeten Größen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Für die Beurteilung der Messunsicherheit nach dem in [29] aufgezeigten Verfahren wird eine lineare Messfunktion benötigt. Daher wird die Jacobi-Matrix von Gleichung (5.1) gebildet. Der Linearisierungsfehler ist tolerierbar, da bei den betrachteten Geradeausfahrten davon ausgegangen werden darf, dass alle Winkel klein ($< 3^\circ$) sind. Als Ar-

beitspunkt für das Referenzsystem wird die ideale Geradeausfahrt angesetzt. Aus der Linearisierung um den Arbeitspunkt (d. h. insbesondere $\beta = \theta = \varphi = 0$) ergibt sich

$$\delta \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta L_1 - \delta L_2 + E\{L_3\}\delta\theta - \delta L_{\text{RLS}} + \delta X_S + \delta X_M + \delta X_\tau \\ (-E\{L_1\} - E\{L_2\})\delta\beta - E\{L_3\}\delta\varphi + \delta Y_{\text{vc}} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

was im Folgenden als *die* Messfunktion bezeichnet wird. Etwaige Terme δX_{def} und δY_{def} wurden in Gleichung (5.2) eliminiert, da X_{def} und Y_{def} per Definition festgelegt werden und somit keinen Unsicherheitsbeitrag liefern. Die Messgröße

$$\delta \mathbf{R} = \mathbf{R} - \begin{pmatrix} -E\{L_1\} - E\{L_2\} - E\{L_{\text{RLS}}\} + X_{\text{def}} \\ Y_{\text{def}} \end{pmatrix}$$

stellt die Abweichung der absoluten Fahrzeugposition vom Arbeitspunkt ($X_{\text{AP}}, Y_{\text{AP}}$) dar. Abbildung 5.5 visualisiert die Zusammenhänge bei der durchgeführten Messung. Es

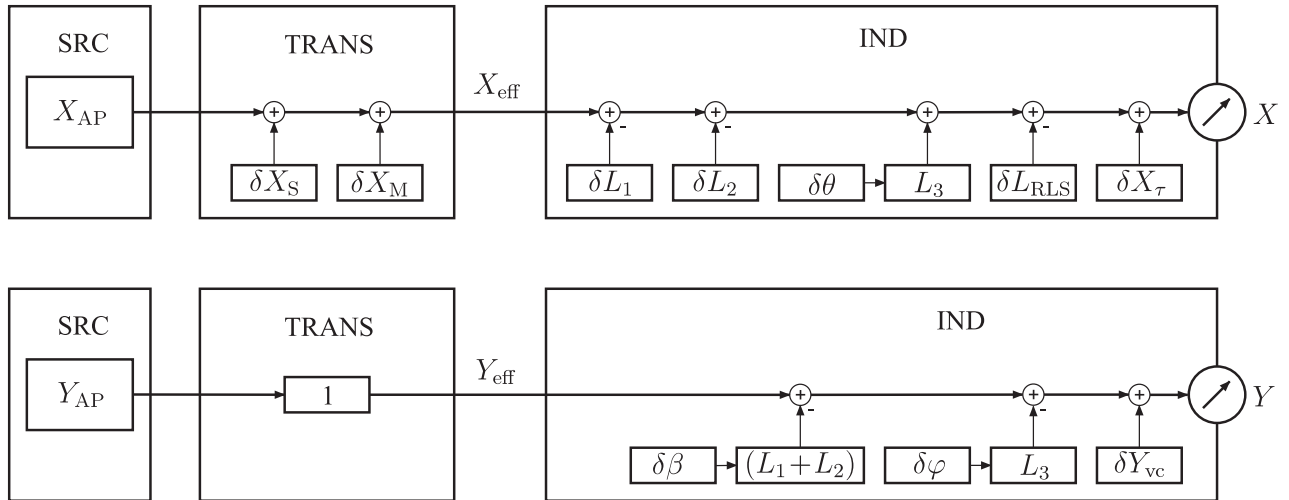


Abbildung 5.5: Blockschaltbild der linearen Messfunktion

zeigt sich, dass der Parameter L_3 , d. h. die Anbauhöhe der Antenne, der Schwimmwinkel β und der Wankwinkel φ keinen Einfluss auf die X -Koordinate der Antenne haben, so lange das System im oder in einer kleinen Umgebung um den Arbeitspunkt betrieben wird. Das Gleiche ist bei der Y -Koordinate für L_1, L_2, L_3 und den Nickwinkel θ zu konstatieren.

5.2.3 Schritt III: Bewertung der Eingangsgrößen

Im Folgenden werden beispielhaft die Geometrieparameter ausführlich behandelt. Es wird deutlich, wie diese Eingangsgrößen wiederum selbst Messgrößen einer unterlagerten Messung sind, deren Messunsicherheit mit dem GUM-Verfahren in rekursiver Weise beurteilt werden kann.

Die drei Geometrieparameter δL_1 , δL_2 und δL_{RLS} ergeben sich direkt aus den Koordinaten der Positionen A, B, C und D (Abbildung 5.4). Für die Beurteilung der Standardunsicherheiten der Parameter wird das unterlagerte Messmodell

$$\begin{aligned} L_1 &= X_{\text{V,C}} - X_{\text{V,B}} \\ L_2 &= X_{\text{V,D}} - X_{\text{V,C}} \\ L_3 &= Y_{\text{V,D}} \\ L_{\text{RLS}} &= X_{\text{V,B}} - X_{\text{V,A}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

betrachtet. Die Standardunsicherheit der X -Koordinate $X_{\text{V,C}}$ des Fahrzeugdrehpunkts (Position C) wird nach Ermittlungsmethode Typ-B beurteilt, da der Fahrzeugdrehpunkt nicht gemessen, sondern nur mit einer entsprechend großen Unsicherheit grob abgeschätzt werden kann. Für die X -Koordinate $X_{\text{V,C}}$ wird eine Gleichverteilung mit dem besten Schätzwert $\bar{x}_{\text{V,C}} = 320,0$ cm und einer Halbweite von 10,0 cm angenommen, was auf eine Unsicherheit von $u_{\bar{x}_{\text{V,C}}} = 5,8$ cm führt. Die Unsicherheiten der X -Koordinaten der Positionen A und B sowie die der X - und Y -Koordinate der Position D werden mit der Ermittlungsmethode Typ-A beurteilt. Dazu werden die Koordinaten der Positionen in dem in Abbildung 5.4 dargestellten Koordinatensystem jeweils 10 mal gemessen. Die relevanten Korrelationen bestehen zum einen zwischen den Größen L_1 und L_2 , da beide auf den Drehpunkt des Fahrzeugs (Position C) bezogen sind und zum anderen zwischen L_1 und L_{RLS} , da beide Größen einen Abstand zum HS-CE-Sensor beschreiben. Es wurden die in Tabelle 5.2 zusammengefassten Werte gemessen.

Aus den empirischen Mittelwerten und dem Modell (5.3) ergeben sich direkt die besten Schätzwerte für die Geometrieparameter:

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= \bar{x}_{\text{V,C}} - \bar{x}_{\text{V,B}} = 287,0 \text{ cm} \\ \bar{l}_2 &= \bar{x}_{\text{V,D}} - \bar{x}_{\text{V,C}} = 119,3 \text{ cm} \\ \bar{l}_3 &= \bar{y}_{\text{V,D}} = 164,5 \text{ cm} \\ \bar{l}_{\text{RLS}} &= \bar{x}_{\text{V,B}} - \bar{x}_{\text{V,A}} = -7,5 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (5.4)$$

In der linearen Messfunktion werden nur die Abweichungen der Größenwerte zum jeweiligen Arbeitspunkt betrachtet. Als Arbeitspunkt bzgl. der Geometrieparameter werden die unbekannten Erwartungswerte verwendet. Diese sind nicht mit Unsicherheiten be-

Tabelle 5.2: Zusammenfassung der gemessenen Koordinaten und den berechneten statistischen Größen in cm bzw. cm²

Größen	$X_{V,A}$	$X_{V,B}$	$X_{V,D}$	$Y_{V,D}$	$X_{V,C}$
Werte	40,3	33,0	439,3	164,4	/
	40,5	33,0	439,2	164,4	
	40,6	32,9	439,2	164,4	
	40,5	32,9	439,4	164,5	
	40,3	33,0	439,2	164,4	
	40,3	32,9	439,3	164,3	
	40,7	33,0	439,4	164,5	
	40,5	33,0	439,3	164,5	
	40,5	33,0	439,3	164,5	
	40,4	33,0	439,2	164,6	
Mittelwert \bar{x}	40,5	33,0	439,3	164,5	320,0
Varianz $s^2(x(1), \dots, x(K))$	0,0183	0,0024	0,0063	0,0073	/
Standardabw. $s(x(1), \dots, x(K))$	0,135	0,049	0,079	0,085	/
Standardunsicherheit $u_{\bar{x}}$	0,043	0,016	0,025	0,027	5,8
Varianz $u_{\bar{x}}^2$	$18,3 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-4}$	33,4

haftet, da die Geometrieparameter für diesen Zweck hinreichend definiert sind und daher keine Eigenunsicherheit aufweisen. Somit entspricht die Varianz der bezogenen Größen denen der Schätzwerte:

$$\begin{aligned}
u_{\delta \bar{l}_1}^2 &= u_{\delta \bar{l}_1 = \bar{l}_1 - E\{L_1\}}^2 = u_{\bar{l}_1}^2 = u_{\bar{x}_{V,C}}^2 + u_{\bar{x}_{V,B}}^2 \\
&= 33,4 \text{ cm}^2 + 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 = 33,4 \text{ cm}^2 \\
u_{\delta \bar{l}_2}^2 &= u_{\delta \bar{l}_2 = \bar{l}_2 - E\{L_2\}}^2 = u_{\bar{l}_2}^2 = u_{\bar{x}_{V,D}}^2 + u_{\bar{x}_{V,C}}^2 \\
&= 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 + 33,4 \text{ cm}^2 = 33,4 \text{ cm}^2 \\
u_{\delta \bar{l}_{RLS}}^2 &= u_{\delta \bar{l}_{RLS} = \bar{l}_{RLS} - E\{L_{RLS}\}}^2 = u_{\bar{l}_{RLS}}^2 = u_{\bar{x}_{V,B}}^2 + u_{\bar{x}_{V,A}}^2 \\
&= 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 + 18,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 = 20,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die quadrierten Standardunsicherheiten $u_{\delta \bar{l}_1}^2$ und $u_{\delta \bar{l}_2}^2$ von $u_{\bar{x}_{V,C}}^2$ dominiert werden und somit einer Gleichverteilung unterliegen. Die der Größe $\delta \bar{l}_{RLS}$ beigeordnete Standardunsicherheit wurde ausschließlich durch Stichproben ermittelt, sodass eine t-Verteilung vorliegt. Mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Gleichung wird ein effek-

tiver Freiheitsgrad von 6 berechnet. Für die Standardunsicherheiten $u_{\delta\bar{l}_1}$, $u_{\delta\bar{l}_2}$ und $u_{\delta\bar{l}_{RLS}}$ sowie die Kovarianzen gilt:

$$\begin{aligned} u_{\delta\bar{l}_1} &= 5,8 \text{ cm} \\ u_{\delta\bar{l}_2} &= 5,8 \text{ cm} \\ u_{\delta\bar{l}_{RLS}} &= 0,05 \text{ cm} \\ u_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_2} &= -u_{\bar{x}_{V,C}}^2 = -33,4 \text{ cm}^2 \\ r_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_2} &= \frac{u_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_2}}{u_{\delta\bar{l}_1} u_{\delta\bar{l}_2}} = -1 \\ u_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_{RLS}} &= -u_{\bar{x}_{V,B}}^2 = -2,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \\ r_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_{RLS}} &= \frac{u_{\delta\bar{l}_1, \delta\bar{l}_{RLS}}}{u_{\delta\bar{l}_1} u_{\delta\bar{l}_{RLS}}} = -8,9 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3 *In der Praxis könnte die äußerst geringe Standardunsicherheit von $u_{\delta\bar{l}_{RLS}}$ und die Korrelation zu $\delta\bar{l}_1$ vernachlässigt und das Messmodell entsprechend vereinfacht werden. Die Größe δL_{RLS} und die damit verbundenen Werte werden jedoch im Folgenden der Vollständigkeit halber weiter mit aufgeführt. Ein wichtiger Aspekt bei der Durchführung des Verfahrens ist, dass zunächst alle bekannten Einflüsse auf die Messung im Modell berücksichtigt und beurteilt werden müssen. Größen dürfen nicht von vornherein als irrelevant eingestuft und vernachlässigt werden. Dies ist erst erlaubt, nachdem die Standardunsicherheiten aller Größen beurteilt und ins Verhältnis gesetzt wurden.*

Bemerkung 4 *Die im vorherigen Absatz durchgeführte Beurteilung der Geometrieparameterunsicherheiten zeigt, dass Eingangsgrößen sich wiederum aus weiteren Eingangsgrößen einer unterlagerten Messfunktion (s. Gleichung (5.3)) zusammensetzen können. In diesem Fall stellen die Geometrieparameter Zwischenmessgrößen dar, für die das GUM-Verfahren anhand des Modells (5.3) durchgeführt werden muss. Die daraus resultierenden Unsicherheiten werden bei der folgenden Beurteilung des gesamten Referenzsystems weiterverwendet. Der Vorteil hierbei ist, dass die ursprünglichen Unsicherheiten der gemessenen Koordinaten nicht weiter betrachtet werden müssen. Die Unsicherheiten der Geometrieparameter hätten an dieser Stelle zur Komplexitätsreduktion auch direkt konservativ abgeschätzt werden können. Allerdings wird die detailliertere Betrachtung der Parameter, d. h. die Erarbeitung weiterer Kenntnisse über deren Zusammensetzung mit kleineren Unsicherheitsbeiträgen belohnt.*

Die vorangegangene Beurteilung der Geometrieparameter veranschaulicht das grundsätzliche Vorgehen zur systematischen Darlegung aller Kenntnisse über die Eingangsgrößen. Für die Erläuterung der weiteren Eingangsgrößenbeurteilungen sei an dieser Stelle auf [136] verwiesen. Tabelle 5.3 fasst die bewerteten Größen zusammen. Die in

Tabelle 5.3: Unsicherheitsbudget aller Eingangsgrößen

Eingangsgröße	Verteilungsform	Schätzwert	Standardunsicherheit	Freiheitsgrade
δL_1	Gleichverteilung	0	5,8	∞
δL_2	Gleichverteilung	0	5,8	∞
δL_{RLS}	t-Verteilung	0	0,05	6
$\delta \theta$	t-Verteilung	0	$2,27 \cdot 10^{-3}$ (rad)	17
δX_{S}	Normalverteilung	0	1	∞
δX_{M}	Normalverteilung	0	0,5	∞
δX_{T}	Gleichverteilung	0,6	0,35	∞
$\delta \beta$	Normalverteilung	0	$5,81 \cdot 10^{-3}$ (rad)	∞
$\delta \varphi$	t-Verteilung	0	$5,28 \cdot 10^{-3}$ (rad)	14
δY_{vc}	Normalverteilung	1,3	1,0	∞

der Übersichtstabelle angegebenen Größen mit der Dimension *Länge* sind in der Einheit cm und die Winkelgrößen in Radiant (rad) angegeben.

5.2.4 Schritt IV: Berechnung der kombinierten Standardmessunsicherheit

Aus der linearen Messfunktion (5.2) lassen sich direkt die beiden Vektoren der Sensitivitätskoeffizienten

$$\mathbf{c}_1^T = (-1 \quad -1 \quad E\{L_3\} \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

bzgl. der *X*-Koordinate bzw.

$$\mathbf{c}_2^T = ((-E\{L_1\} - E\{L_2\}) \quad -E\{L_3\} \quad 1)$$

der *Y*-Koordinate ablesen. Aus beiden Vektoren wird die Sensitivitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{c}_2^T \end{pmatrix}$$

gebildet, die es erlaubt, die Messfunktion (5.2) in Matrizenschreibweise darzustellen:

$$\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & E\{L_3\} & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-E\{L_1\} - E\{L_2\}) & -E\{L_3\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta L_1 \\ \delta L_2 \\ \delta \theta \\ \delta L_{\text{RLS}} \\ \delta X_S \\ \delta X_M \\ \delta X_\tau \\ \delta \beta \\ \delta \varphi \\ \delta Y_{\text{vc}} \end{pmatrix}.$$

An dieser Stelle zeigt sich deutlich, dass beide Messgrößen nicht korreliert sind, obwohl sie bei ein und derselben Messung ermittelt werden. Dies liegt darin begründet, dass nach der erforderlichen Linearisierung der Messfunktion (5.1) keine Eingangsgröße mehr existiert, die beide Komponenten der linearen Messfunktion (5.2) beeinflusst. Bei der Messung der Positionskomponenten handelt es sich somit um zwei getrennte Messungen, die nur der Form halber gemeinsam betrachtet werden.

Entsprechend dem Gesetz der Unsicherheitsfortpflanzung ergibt sich für die Unsicherheit des besten Schätzwerts für die X -Koordinate:

$$\begin{aligned} u_{\delta \bar{x}}^2 &= c_{1,1}^2 u_{\delta \bar{l}_1}^2 + c_{1,2}^2 u_{\delta \bar{l}_2}^2 + c_{1,3}^2 u_{\delta \bar{\theta}}^2 + c_{1,4}^2 u_{\delta \bar{l}_{\text{RLS}}}^2 + c_{1,5}^2 u_{\delta \bar{x}_S}^2 \\ &\quad + c_{1,6}^2 u_{\delta \bar{x}_M}^2 + c_{1,7}^2 u_{\delta \bar{l}_{\text{RLS}}}^2 \\ &\quad + 2(c_{1,1}c_{1,2}u_{\delta \bar{l}_1, \delta \bar{l}_2} + c_{1,1}c_{1,4}u_{\delta \bar{l}_1, \delta \bar{l}_{\text{RLS}}}) \\ &= 33,4 \text{ cm}^2 + 33,4 \text{ cm}^2 + 27060,25 \text{ cm}^2 \cdot 5,16 \cdot 10^{-6} + 20,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 \\ &\quad + 0,25 \text{ cm}^2 + 0,12 \text{ cm}^2 + 2(-33,4 \text{ cm}^2 - 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2) = 1,51 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Werte der Tabelle 5.3 sowie die besten Schätzwerte für die Geometrieparameter (vgl. Gleichung (5.4)) eingesetzt.

Bemerkung 5 *Bemerkenswerterweise ist die resultierende Varianz verhältnismäßig klein gegenüber den großen Unsicherheitsbeiträgen von $u_{\delta \bar{l}_1}^2$ und $u_{\delta \bar{l}_2}^2$. Dies liegt darin begründet, dass die beiden Eingangsgrößen zum einen durch die gemeinsame Einflussgröße $X_{V,C}$ korreliert sind und zum anderen die Position des Drehpunkts in Form einer Subtraktion in der unterlagerten Messfunktion enthalten ist. Je stärker die Korrelation zwischen den zwei Eingangsgrößen ist, desto stärker werden die Unsicherheitsbeiträge durch die Kovarianz-Summanden aufgehoben. Bei der vorliegenden vollständigen Korrelation von $\delta \bar{l}_1$ und $\delta \bar{l}_2$ spiegelt sich die große Unsicherheitskomponente des Fahrzeugdrehpunkts nicht mehr im Ergebnis wieder. Anschaulich wird dies sofort klar: Wird*

nur die X_V -Richtung betrachtet, geben neben L_{RLS} die Geometrieparameter L_1 und L_2 an, wie weit die Dachantenne von der Reflexionslichtschränke entfernt montiert ist. Da sich der Fahrzeugdrehpunkt zwischen der Reflexionslichtschränke und der Dachantenne befindet, geht die $X_{V,C}$ -Koordinate einmal positiv (L_1) und einmal negativ (L_2) in die Berechnung mit ein. Aus der Fahrzeuggeometrie ergibt sich daher zwangsläufig eine negative Kovarianz, die letztlich die Messunsicherheit verringert. Grundsätzlich spielt die Position des Fahrzeugdrehpunkts keine Rolle, da ein als zu klein angenommener Abstand L_1 auf einen entsprechend größeren Abstand L_2 führt und umgekehrt.

Für die Unsicherheit der Y -Koordinate gilt entsprechend der Werte aus Tabelle 5.3 in analoger Weise:

$$\begin{aligned} u_{\delta\bar{y}}^2 &= c_{2,1}^2 u_{\delta\bar{\beta}}^2 + c_{2,2}^2 u_{\delta\bar{\varphi}}^2 + c_{2,3}^2 u_{\delta\bar{y}_{vc}}^2 \\ &= 165079,69 \text{ cm}^2 \cdot 33,76 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 + 27060,25 \text{ cm}^2 \cdot 27,88 \cdot 10^{-6} + 1,0 \text{ cm}^2 \\ &= 7,33 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Aus den berechneten Varianzen ergeben sich direkt die entsprechenden Standardunsicherheiten

$$u_{\delta\bar{x}} = \sqrt{u_{\delta\bar{x}}^2} = 1,2 \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad u_{\delta\bar{y}} = \sqrt{u_{\delta\bar{y}}^2} = 2,7 \text{ cm}.$$

An dieser Stelle darf die Messunsicherheit abgerundet werden, da der Rundungsfehler kleiner als 5% ist.

5.2.5 Schritt V: Ermittlung der erweiterten Messunsicherheit

Für die vektorielle Antennenposition $\mathbf{R} = (X \ Y)^T$ wird die erweiterte Messunsicherheit durch einen zweidimensionalen Überdeckungsbereich charakterisiert. Die Ellipse

$$(\delta\mathbf{r} - \delta\bar{\mathbf{r}}) \mathbf{U}_{\delta\bar{\mathbf{r}}}^{-1} ((\delta\mathbf{r} - \delta\bar{\mathbf{r}}))^T = k_P$$

kennzeichnet den kleinstmöglichen Überdeckungsbereich, wobei für den zweidimensionalen Fall und eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ der Erweiterungsfaktor $k_P = 2,45$ zu wählen ist [67, S. 23]. Abbildung 5.6 visualisiert den 95%-Überdeckungsbereich, dessen Zentrum durch die besten Schätzwerte festgelegt ist. Beide Messgrößen sind unkorreliert, wodurch die Halbachsen der Ellipse parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. An dieser Stelle werden die Längen der Halbachsen

$$U_{\delta\bar{x}} = 3,5 \text{ cm}$$

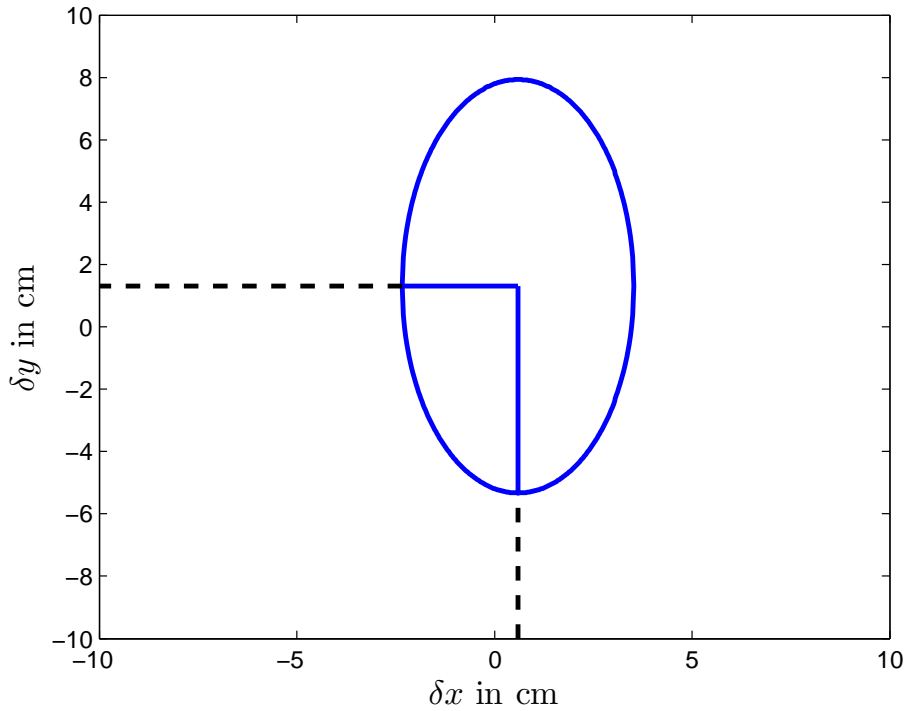


Abbildung 5.6: Erweiterte Messunsicherheit der auf den Arbeitspunkt bezogenen Antennenposition mit einem Grad an Vertrauen von $P = 95\%$

bzw.

$$U_{\delta\bar{y}} = 7,9 \text{ cm}$$

als erweiterte Unsicherheiten den besten Schätzwerten $\delta\bar{\mathbf{r}} = (\delta\bar{x} \ \delta\bar{y})^T$ beigeordnet.

5.2.6 Schritt VI: Angabe des vollständigen Ergebnisses

Der beste Schätzwert für die Position der Dachantenne

$$\delta\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \delta\bar{x} \\ \delta\bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\bar{x}_\tau \\ \delta\bar{y}_{vc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \text{ cm} \\ 1,3 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

ergibt sich direkt aus den besten Schätzwerten für die Eingangsgrößen, welche in die Messfunktion eingesetzt werden. Dem besten Schätzwert wird eine erweiterte Messunsicherheit von

$$\begin{pmatrix} U_{\delta\bar{x}} \\ U_{\delta\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \text{ cm} \\ 7,9 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

beigeordnet. Hierbei wurde der Erweiterungsfaktor $k_P = 2,45$ für den elliptischen Überdeckungsbereich mit $P = 95\%$ verwendet.

Ein Wert \mathbf{r} , der der Antennenposition vernünftigerweise zugeordnet werden kann, befindet sich innerhalb der Intervalle

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{r}} - U_{\delta\bar{\mathbf{r}}} &\leq \delta\mathbf{r} \leq \delta\bar{\mathbf{r}} + U_{\delta\bar{\mathbf{r}}} \\ \mathbf{r}_{\text{AP}} + \delta\bar{\mathbf{r}} - U_{\delta\bar{\mathbf{r}}} &\leq \mathbf{r} \leq \delta\bar{\mathbf{r}} + U_{\delta\bar{\mathbf{r}}} + \mathbf{r}_{\text{AP}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{\text{def}} - 401,7 \text{ cm} \\ y_{\text{def}} - 6,6 \text{ cm} \end{pmatrix} \leq \mathbf{r} \leq \begin{pmatrix} x_{\text{def}} - 394,7 \text{ cm} \\ y_{\text{def}} + 9,2 \text{ cm} \end{pmatrix}}.$$

Hierbei bezeichnen x_{def} und y_{def} die Werte der durch die digitale Karte definierten Koordinaten des betrachteten Referenzpunkts und

$$\mathbf{r}_{\text{AP}} = \begin{pmatrix} -\bar{l}_1 - \bar{l}_2 - \bar{l}_{\text{RLS}} + x_{\text{def}} \\ y_{\text{def}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{def}} - 398,8 \text{ cm} \\ y_{\text{def}} \end{pmatrix}$$

den Arbeitspunkt des Referenzsystems. Die Messunsicherheit ist gemäß DIN V ENV 13005 und dem GUM Supplement 2 ermittelt worden.

Bemerkung 6 *Möglicherweise kann die ermittelte Messunsicherheit im Allgemeinen zu groß gemessen an den geltenden Anforderungen des beabsichtigten Anwendungsfalls sein. In diesem Fall kann die beurteilte Messunsicherheit verringert werden, indem weitere Kenntnisse über die Eingangsgrößen im Messmodell erarbeitet und zur Beurteilung hinzugezogen werden. Dies ist in der Regel vorteilhafter, als das Messsystem durch ein leistungsfähigeres und somit teureres Messsystem zu ersetzen und hierdurch eine hinreichend kleine Messunsicherheit zu erreichen. Grundsätzlich muss jedoch beachtet werden, dass bei einer tiefgründigeren Beschäftigung mit dem Messprozess in der Regel weitere Unsicherheitsquellen erkannt werden. Diese müssen ebenfalls im Messmodell berücksichtigt werden und können letztlich zu einer Vergrößerung der ursprünglich ermittelten Messunsicherheit führen.*

5.3 Softwaregestützte Verifizierung der beurteilten Messunsicherheit

Die in Abschnitt 5.2 durchgeführte Messunsicherheitsbeurteilung für das Referenzsystem basiert auf dem Standard-GUM-Verfahren. Dieses Verfahren beruht auf der Annahme, dass die nichtlineare Messfunktion (3.4) hinreichend gut linearisiert werden kann. In Abschnitt 5.2 wurde die Linearisierbarkeit der angesetzten Messfunktion (5.1) als gegeben angenommen, da die in der Nähe des Arbeitspunkts des Referenzsystems

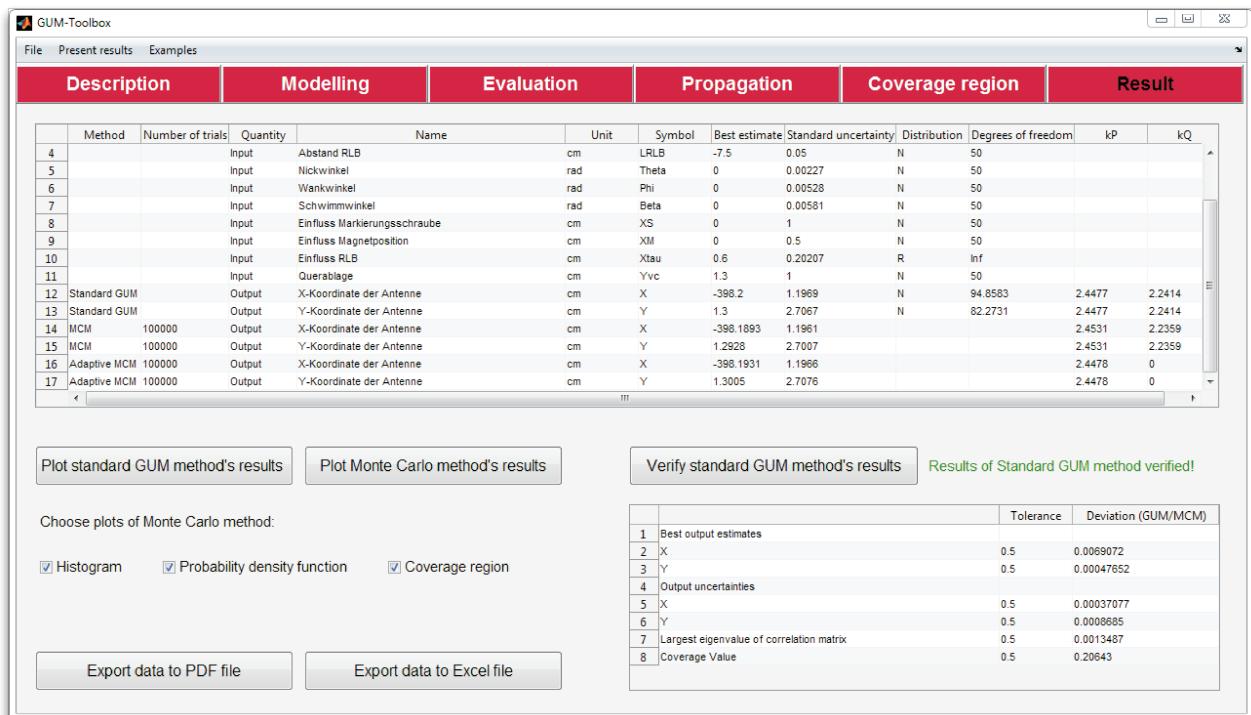


Abbildung 5.7: Messunsicherheitsbudget des Referenzsystems

auf tretenden Winkel klein ($< 3^\circ$) sind. Des Weiteren wurde angenommen, dass der beste Schätzwert für die Antennenposition aufgrund der Vielzahl an Eingangsgrößen durch eine Normalverteilung charakterisiert werden kann. Im Folgenden gilt es die auf diesen Annahmen gründenden Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens zu verifizieren. Zunächst werden die analytischen Berechnungen aus Abschnitt 5.2 mittels eines Rechnerprogramms überprüft. Anschließend werden die Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens mit Hilfe des Monte-Carlo-Verfahrens verifiziert.

Zur softwaregestützten Beurteilung von Messunsicherheiten wurde im Rahmen dieser Arbeit eine MATLAB-Toolbox entwickelt, welche direkt in die bestehende Softwareumgebung des Referenzsystems eingebunden werden kann. Die Toolbox wurde in [91] um eine grafische Benutzeroberfläche und in [90] um einen Monte-Carlo-Algorithmus erweitert. Die Toolbox verfügt über eine grafische Benutzeroberfläche mit Hilfe derer die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 dargestellten Schritte des Leitfadens in übersichtlicher Weise Schritt für Schritt eingegeben werden können.

Abbildung 5.7 zeigt das Ergebnis, das auf Basis des Messmodells (5.1) und der in Unterabschnitt 5.2.3 vorgenommenen Eingangsgrößenbeurteilung berechnet wurde. Bei der Anwendung des Standard-GUM-Verfahrens stimmen die mit Hilfe der Toolbox berechneten besten Schätzwerte $\bar{x} = -398,2$ cm bzw. $\bar{y} = 1,3$ cm für die beiden Koordina-

ten, wie erwartet, mit den in Unterabschnitt 5.2.6 bestimmten Ergebnissen überein (vgl. Abbildung 5.6). Dies gilt ebenso für die beigeordneten Standardunsicherheiten $u_{\delta\bar{x}} = 1,2$ cm bzw. $u_{\delta\bar{y}} = 2,7$ cm und den ermittelten Erweiterungsfaktor $k_P = 2,45$.

Zu Verifizierung der Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens wurde eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Bei einer signifikanten Dezimalstelle ergeben sich für die Vergleichsgrößen *bester Schätzwert*, *Standardunsicherheit*, *größter Eigenwert der Korrelationsmatrix* und *Erweiterungsfaktor* entsprechend Abschnitt 3.4 die Toleranzen $\delta_{u,m} = \rho_{\lambda_{\max}} = \kappa_{k_P} = 0,5$. Es zeigt sich, dass alle Abweichungen innerhalb der geforderten Toleranzen liegen. Die Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens stimmen in sehr guter Näherung mit den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation überein. Es bestätigt sich die Vermutung, dass ein gut linearisierbares Messmodell vorliegt und die Kenntnis über die Antennenposition als normalverteilt angenommen werden darf. Die Ergebnisse des Standard-GUM-Verfahrens sind somit verifiziert.

5.4 Verifizierung der Qualitätseigenschaften des Referenzsystems

Zur abschließenden Beantwortung der Fragestellung, ob das entwickelte Messsystem prinzipiell als Normal für die satellitenbasierte Pkw-Ortung genutzt werden kann, muss die Erfüllung der metrologischen Anforderungen an die Messqualität gemäß den identifizierten Eigenschaften und Merkmalen (vgl. Abbildung 2.5) verifiziert werden. Dies erfolgt gemäß den Vorarbeiten in [140]. Die wichtigste Eigenschaft – die Messunsicherheit – wurde bereits in Abschnitt 5.2 untersucht und kann im Hinblick auf die GPS-basierte Ortung als hinreichend angesehen werden. Zur Beurteilung der weiteren Eigenschaften der Messqualität wird im Folgenden ein im Verkehr typisches Szenario betrachtet: Nach längerem Stillstand wird die Fahrt fortgesetzt, wobei zunächst stark beschleunigt und anschließend mit einer konstanten Geschwindigkeit gefahren wird. Der Anfahrvorgang, während dem das Fahrzeug die ersten 50 m zurücklegt, wird nicht betrachtet, um den Einfluss der Startposition und der Anfangsorientierung des Fahrzeugs auf den weiteren Verlauf der Messung zu minimieren.

Verifizierung der Genauigkeitsanforderung

Neben der Ausrichtung des Fahrzeugs am Startpunkt der Prüftrajektorie ist die Güte der Fahrzeugregelung der wichtigste Einflussfaktor auf die Vergleichspräzision der Referenzpositionen aus verschiedenen Messfahrten. Abbildung 5.8 zeigt den Verlauf der Querabweichung des geregelten Fahrzeugs zur Prüftrajektorie. Da die mittlere Quer-

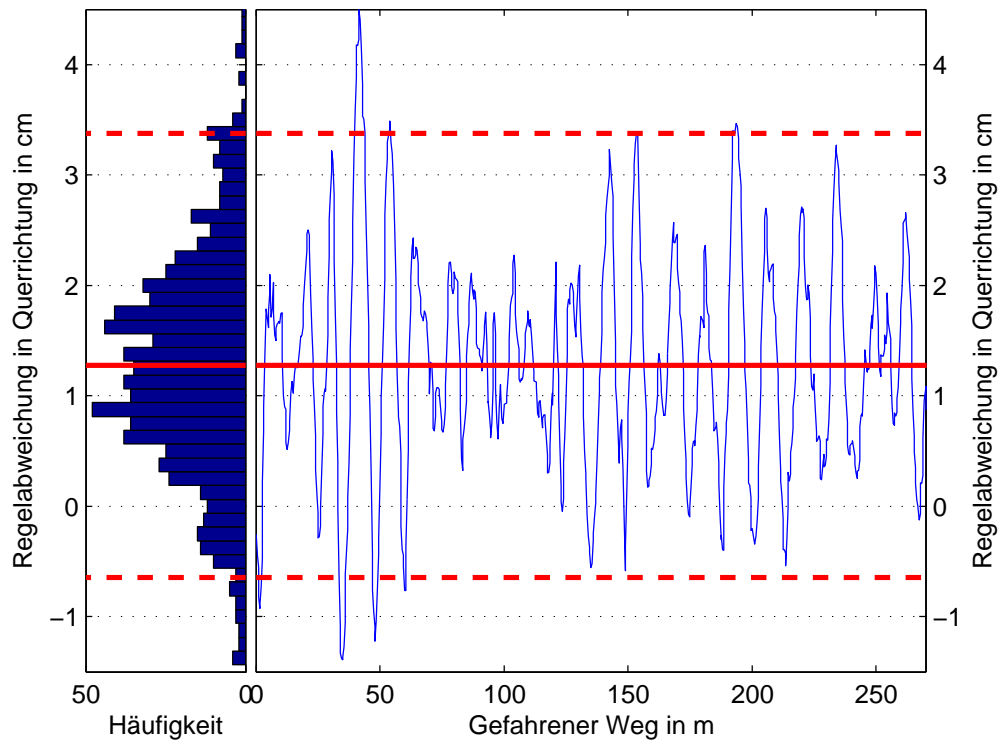


Abbildung 5.8: Querablage des geregelten Fahrzeugs zur Prüftrajektorie

ablage allein nicht aussagekräftig ist, sind zusätzlich die Grenzen des 95%-Intervalls eingezeichnet. Es zeigt sich, dass die Fahrzeugregelung in der Lage ist, das Fahrzeug in einem ± 2 cm breiten Intervall um den Mittelwert zu halten. Hierdurch ist eine verlässliche, optische Erfassung aller Referenzpunktmarkierungen durch die fahrzeugmittig angebrachte Reflexionslichtschranke gewährleistet.

Da die Antenne in Querrichtung mittig auf dem Fahrzeugdach angebracht ist, lässt sich die Forderung an eine hohe Genauigkeit der Referenzposition durch einen Mittelwert und eine Standardabweichung von 0 cm quantifizieren. Dies kann von einem realen Messsystem natürlicherweise nicht erreicht werden. In der Fachliteratur wird die zu erwartende Standardabweichung kommender satellitenbasierter Ortungssysteme unter optimalen Messbedingungen auf wenige Meter angegeben. Beispielsweise ist die Streuung der Horizontalposition des ursprünglich vorgesehenen Galileo-Safety-of-Life-Dienstes unter Nutzung eines Zweifrequenz-Empfängers auf 4 m (95%) spezifiziert worden [36, S. 16]. Für GPS wurde eine entsprechende Streuung von 4,65 m (95%) gemessen [73, S. 363]. Diese Angaben beziehen sich auf Messungen einer zeitinvarianten Position, sodass für den hier betrachteten Fall einer zeitvarianten Position eine noch höhere Streuung vermutet werden muss.

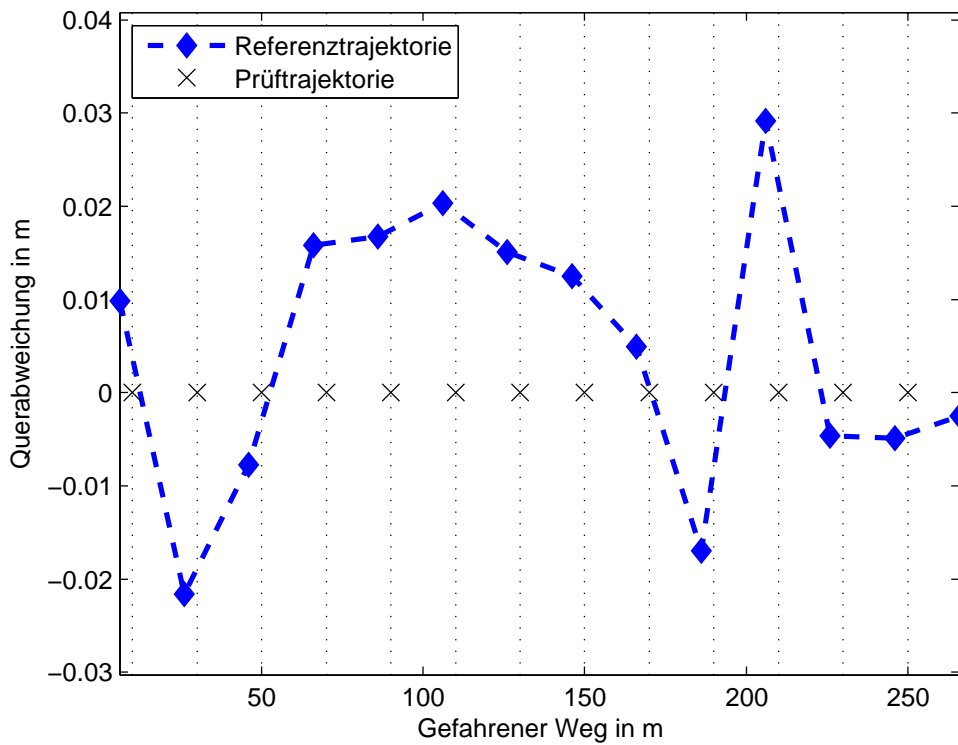


Abbildung 5.9: Generierte Referenzposition in Längs- und Querrichtung

Die empirische Standardabweichung der in Abbildung 5.9 dargestellten Differenz zwischen der Referenztrajektorie und der Prüftrajektorie ΔY_{Ref} beträgt 1,6 cm bei einem Mittelwert von 0,5 cm. Zusätzlich muss die in Abbildung 5.8 gezeigte Querablage berücksichtigt werden. Durch die hohe Güte der Querdynamikregelung weist die Querablage bezogen auf die Prüftrajektorie ΔY_{Reg} eine mittlere Abweichung von 1,3 cm und eine empirische Standardabweichung von 1,0 cm auf. Eine additive Überlagerung der Größen ΔY_{Ref} und ΔY_{Reg} führt auf eine mittlere Gesamtabweichung von $\Delta Y = 1,9$ cm und ein 95%-Intervall von 3,8 cm. Somit ist die empirische Standardabweichung des Referenzsystems – bei der Messung ein zeitvarianten Größe – mindestens eine Größenordnung kleiner als die spezifizierte Streuung des zukünftigen satellitenbasierten Ortungssystems Galileo (4 m für 95%) und die bestimmte Streuung des existierenden GPS (4,65 m für 95%). Dies wird als ausreichend für eine Referenz angenommen. Zudem ist mit der mittleren Gesamtabweichung von $\Delta Y = 1,9$ cm die Anforderung an die Messrichtigkeit des Referenzsystems hinreichend gut erfüllt.

Verifizierung der Konsistenzanforderung

Die ermittelte Referenzposition des Fahrzeugs zeigt Abbildung 5.9. Die in der digitalen Karte eingetragenen Positionen der georeferenzierten Referenzpunkte weisen einen Abstand von 20 m in Richtung der X -Achse auf und sind durch Kreuze markiert. Die in Abschnitt 5.2 beschriebene Vermessung des Fahrzeugs hat ergeben, dass sich das Zentrum der Dachantenne $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{\text{RLS}} = 398,8$ cm in Längsrichtung bzw. X -Richtung hinter der Reflexionslichtschranke befindet. Dies wird durch die bei der Messfahrt generierten Referenzpositionen bestätigt. Die Referenzpositionen liegen unter Berücksichtigung der Schwimm-, Nick- und Wankbewegung stets um diesen Wert verschoben zu den gestrichelt eingezeichneten Referenzlinien. Die in Abbildung 5.8 dargestellte Abweichung in Querrichtung wird durch die Schwimm-, Nick- und Wankbewegung des Fahrzeugs hervorgerufen. Bereits kleine Winkel ($<3^\circ$) führen zu einer deutlichen Veränderung der Referenzantennenposition. Die Ursache hierfür liegt in dem großen vertikalen Abstand der Dachantenne gegenüber dem Fahrzeugschwerpunkt (vgl. $\bar{l}_3 = 164,5$ cm). Dies zeigt, dass für die Realisierung des Referenzsystems mit einer Messpräzision und einer Messrichtigkeit im Zentimeterbereich die Berücksichtigung der drei Winkel zwingend erforderlich ist.

Abbildung 5.9 zeigt ebenfalls, dass alle der insgesamt 14 georeferenzierten Referenzmesspunkte im dargestellten Bereich der Versuchsstrecke erkannt wurden. Die Abstände in Fahrtrichtung zwischen den generierten Referenzpositionen betragen unter Vernachlässigung der Fahrzeugorientierung, wie ebenfalls zu erwarten, 20 m und sind äquidistant. Daher kann die Anforderung an die Konsistenz der generierten Referenzpositionen als erfüllt angesehen werden.

Verifizierung der Latenzanforderung

Die Latenz des Referenzpositionssignals wird durch die im System auftretenden Laufzeiten bei den Signalübertragungen hervorgerufen. Hierbei müssen die Signalwege zwischen der Reflexionslichtschranke und der MicroAutoBox, zwischen dem CORREVIT-System und dem Bordrechner sowie zwischen dem Bordrechner und der MicroAutoBox betrachtet werden. Es kann davon ausgegangen werden, dass der von der Reflexionslichtschranke ausgegebene Spannungspegel instantan an der MicroAutoBox anliegt und somit keine Latenz auftritt. Die Verbindung zwischen dem CORREVIT-System, dem Bordrechner und der MicroAutoBox wird über das CAN-Protokoll realisiert. Aufgrund der wenigen Teilnehmer (1-zu-1-Verbindung) und des geringen Datenvolumens ist der CAN-Bus nicht ausgelastet. Versuchsmessungen am Fahrzeug haben gezeigt, dass die Übertragung einer CAN-Nachricht über den Bus und ihre anschließende Verarbeitung in weniger als 1 ms erfolgt, sodass auch hier keine Verzögerung berücksichtigt werden

muss. Das Referenzsystem weist durch den Verzicht auf räumlich ausgedehnte oder funkbasierte Messinstrumente keine signifikante Latenz auf.

Verifizierung der Verfügbarkeitsanforderung

Um die Erfüllung der Punktverfügbarkeitsanforderung zu untersuchen, muss nach [140] überprüft werden, inwiefern das Referenzsystem in der Lage ist, den bei der Messung abgetasteten Weg-Zeit-Verlauf des Fahrzeugs durch eine Interpolation in der Nachbearbeitung zu rekonstruieren. In anderen Worten: Es muss die Frage beantwortet werden, ob die ortsdiskret eingerichteten Referenzmesspunkte eine hinreichende Abtastung darstellen. Das Weg-Zeit-Signal wird durch den Längsgeschwindigkeitsverlauf des Fahrzeugs definiert, der in Abbildung 5.10 inklusive des Anfahr- bzw. Abbremsvorgangs dargestellt ist. Die Abbildung zeigt deutlich den durch die Fahrzeugregelung induzierten Grenzzyklus, der nach dem Beschleunigen und dem Hochschalten in den 2. Gang in der Zeit von ca. $t_1 = 20$ s bis ca. $t_2 = 53$ s durchlaufen wird. Eine Fourier-Transformation für diesen Bereich ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Aus der Abbildung werden die relevanten Frequenzanteile der Geschwindigkeitsänderung ermittelt. Für die hier betrachtete Messfahrt wird als höchster relevanter Frequenzanteil $f_{\max} = 0,1$ Hz abgelesen. Die Integration einer Sinus-Funktion über die Zeit mit der Frequenz f_{\max} erzeugt das zum Geschwindigkeitsverlauf korrespondierende Weg-Signal. Das resultierende Geschwindigkeit-Weg-Diagramm zeigt Abbildung 5.12.

Abbildung 5.12 dient als Grundlage für die Verifizierung der Distanz zwischen den Referenzmesspunkten. Das dargestellte Geschwindigkeit-Weg-Signal muss gemäß dem Nyquist-Shannon-Theorem mindestens mit doppelter Ortsfrequenz abgetastet werden. Die gegebene Ortsfrequenz $f_a = 0,0144 \frac{1}{\text{m}}$ führt auf eine notwendige Ortsabtastperiode von $s_a = 36,9$ m. Dabei ist die Ortsabtastperiode s_a reziprok proportional zur Frequenz f_a . Eine schnellere Änderung des Geschwindigkeitssignals erfordert somit eine größere Anzahl an Referenzmesspunkten. Bemerkenswerterweise ist die Ortsabtastperiode ebenfalls proportional zur Soll-Geschwindigkeit. Obwohl sich das Fahrzeug schneller bewegt, sind weniger Referenzmesspunkte erforderlich. Dies widerspricht der Intuition, liegt jedoch darin begründet, dass bei einer höheren Geschwindigkeit der nächste Referenzmesspunkt schneller erreicht wird und das Geschwindigkeit-Zeit-Signal dennoch ausreichend oft abgetastet wird. Mit einer Ortsabtastperiode von $s_{a,RS} = 20$ m, wie sie bei dem hier betrachteten Messaufbau realisiert wurde, ist das Abtasttheorem und somit die Verfügbarkeitsanforderung an das Referenzsystem erfüllt.

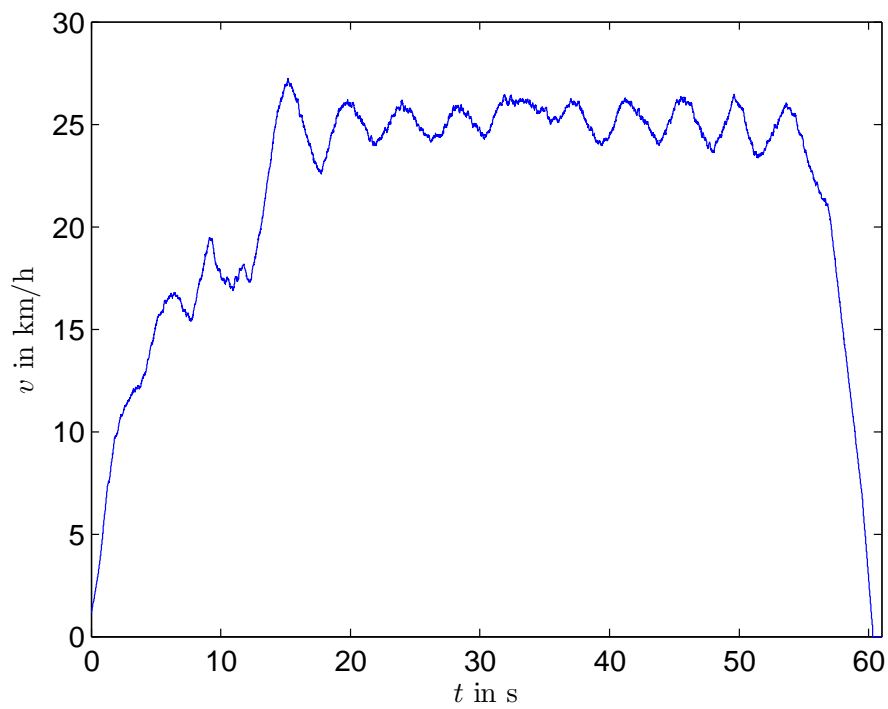


Abbildung 5.10: Vollständiger Geschwindigkeitsverlauf der Messfahrt

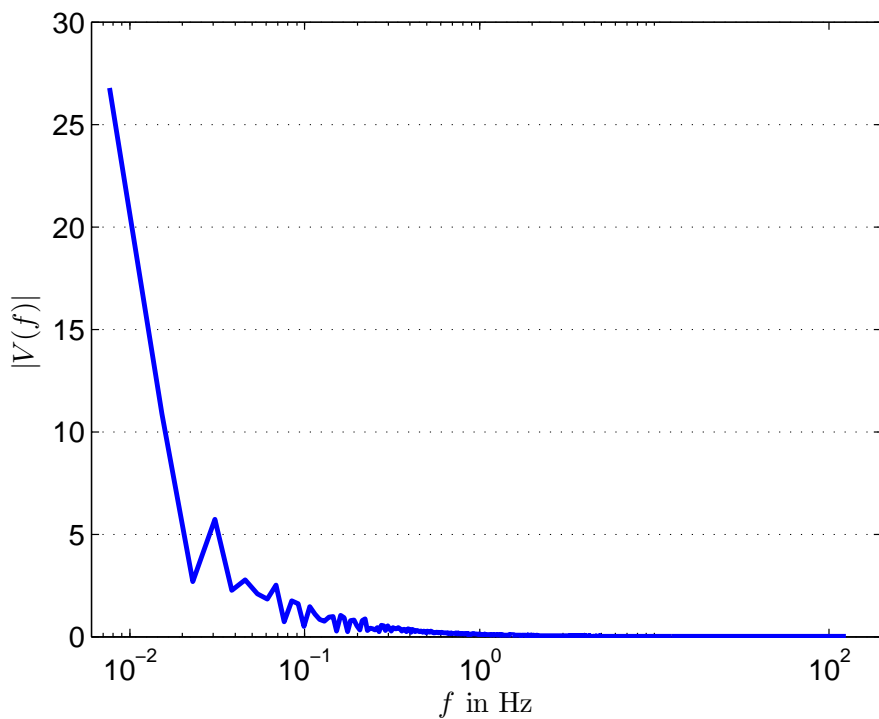


Abbildung 5.11: Amplitudenspektrum des Geschwindigkeitssignals während des Grenzyklus

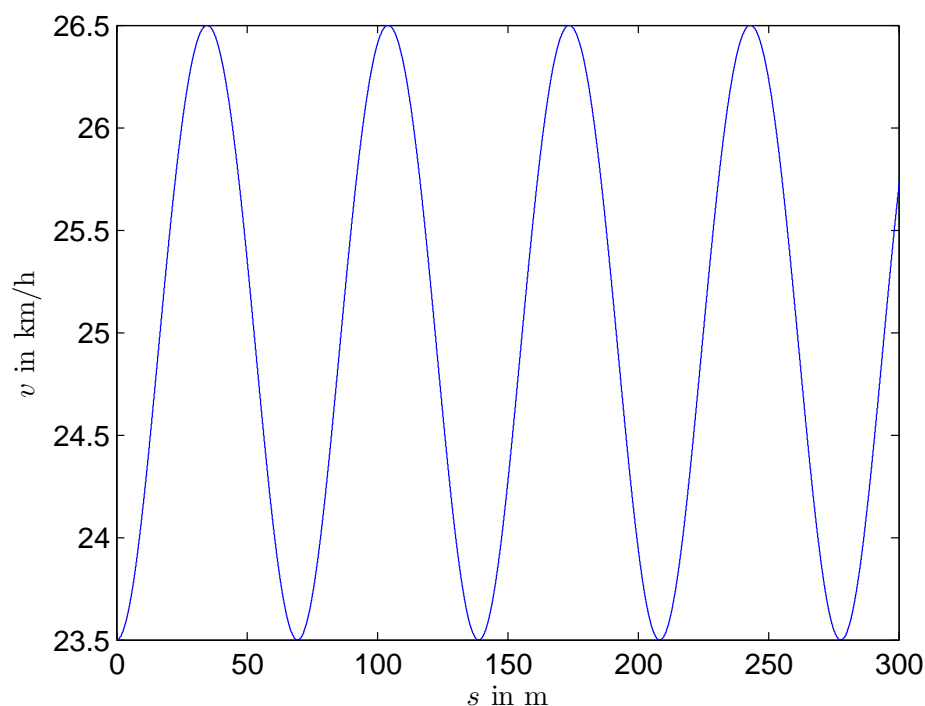


Abbildung 5.12: Simulierter Geschwindigkeitsverlauf mit der Frequenz $f_{\max} = 0,1$ Hz aufgetragen über den zurückgelegten Weg

Verifizierung der Zuverlässigkeitsanforderung



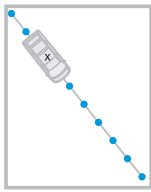
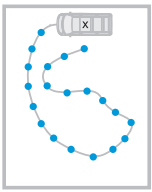
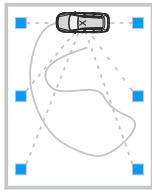
Die Zuverlässigkeit ist gegeben, da durch die Erfüllung des Abtasttheorems das kontinuierliche Referenzpositionssignal wiederhergestellt werden kann und Referenzpositionen somit über die gesamte Messdauer ununterbrochen vorliegen. Zudem sind keine besonderen Anforderungen an die Zuverlässigkeit zu stellen. Im Falle einer Unzuverlässigkeit der Referenzwerte während einer Messfahrt kann diese ohne Nachteile wiederholt werden.

KAPITEL 6

Entwurf und Realisierung eines mobilen Referenzsystems

Das in Kapitel 5 vorgestellte Referenzsystem dient als Normal um die systematischen Messabweichungen von beliebigen Fahrzeugortungssystemen zu bestimmen. Hierauf aufbauend kann eine entsprechende Korrektur vorgenommen werden, wie es im GUM-Leitfaden gefordert wird. Das Referenzsystem erfüllt die sich aus der allgemeingültigen Definition der Messqualität ergebenden (vgl. Abschnitt 2.3) metrologischen Anforderungen. Die Erfüllung der metrologischen Anforderungen allein ist jedoch nicht hinreichend für eine praxisnahe Prüfung satellitenbasierter Fahrzeugortungssysteme. So zeigt Abschnitt 6.1, dass hierfür weitere technische Anforderungen, wie z. B. ein variabler Einsatzort, an ein Referenzsystem zu stellen sind, die über die rein metrologischen Anforderungen hinausgehen. Es ist ein praxisnahes Referenzsystem notwendig, das auch diese Anforderungen erfüllt. Hierfür werden in Abschnitt 6.2 auf Basis der metrologischen und technischen Anforderungen konkrete Bewertungskriterien an den Kern des Referenzsystems – die Referenzortungstechnologie – abgeleitet. Nach einer Gegenüberstellung gängiger Ortungstechnologien wird eine geeignete Technologie ausgewählt. Abschnitt 6.3 beschreibt den daraus resultierenden Messaufbau des neu entwickelten Referenzsystems. Abschnitt 6.4 zeigt abschließend die Kalibrierung des Messaufbaus am Ortungsnormal zur Bestimmung der systematischen Messabweichung.

Tabelle 6.1: Klassifizierung der Referenzsystemtypen für die Fahrzeugortung

Komplexität/ Flexibilität				
Typ	A	B	C	D
				
Position	zeitinvariant	zeitvariant	zeitvariant	zeitvariant
Geschwindigkeit	fixiert	beliebig	beliebig	beliebig
Prüfspur	fixiert durch RMP	fixiert durch RMP	beliebig durch RMP	beliebig
Prüfgebiete	fixiert	fixiert	beliebig	beliebig

6.1 Kategorisierung von technischen Anforderungen an ein mobiles Referenzsystem

Unabhängig von der konkreten Implementierung können Referenzsysteme für die Fahrzeugortung signifikante Unterschiede struktureller Natur aufweisen. Bevor Anforderungen an ein Referenzsystem aufgestellt werden können ist daher zu entscheiden, welcher Typ bei der Entwicklung eines prüfprozesstauglichen Systems anzustreben ist. Tabelle 6.1 fasst die Eigenschaften der vier generischen Grundtypen zusammen, welche in [144] identifiziert und als Typ A, B, C und D definiert wurden.

Erfahrungsgemäß werden Aussagen über die Messqualität satellitenbasierter Ortungssysteme nur bzgl. der Messung einer zeitinvarianten Position angegeben. Für diese Art der Positionsmessung wird ein Referenzsystem verwendet, das nach Tabelle 6.1 als Typ A-System zu bezeichnen ist. Hierbei wird die Messqualität ausschließlich anhand eines ortsfesten und georeferenzierten Referenzmesspunkts (RMP) bestimmt. Dies wird in der Literatur fälschlicherweise häufig als *statische* Messung bezeichnet.

Messungen, bei denen die zu bestimmende Position im Laufe der Zeit variiert, sind bei der Eignungsprüfung von satellitenbasierten Ortungssystemen für Verkehrsanwendungen essenziell, da hier naturgemäß sich bewegende Verkehrsobjekte zu orten sind. Zur Berücksichtigung des Einflusses dieser Bewegung auf das Messergebnis ist ein Referenzsystem erforderlich, das mindestens einem Typ B-System entspricht. Bei einem Typ B-System wird das Prüffahrzeug entlang einer Sequenz von ortsfesten und georeferenzierten Referenzmesspunkten geführt, was die Grundidee des Typ A-Systems konsequent erweitert. Dies stellt den wesentlichen Evolutionsschritt bei der Entwick-

lung von Referenzsystemen dar. Bei einem Typ B-System besteht nach wie vor eine für die praktikable Durchführung von Prüfprozessen nachteilige Kopplung zwischen dem Prüffahrzeug und der Prüfspur, die durch die ortsfesten Referenzmesspunkte und deren notwendige fahrzeugzeitige Erfassung gegeben ist. Allerdings ist genau diese Kopplung zwingend für eine experimentelle Analyse der metrologischen Leistungsfähigkeit des Referenzsystems, da hier die Messung einer zeitvarianten Position (Fahrzeug) mit der Messung einer zeitinvarianten Position (Referenzmesspunkt) verknüpft wird (vgl. Kapitel 5).

Ein Referenzsystem entspricht dem Typ-C, falls die Referenzmesspunkte nicht fest an den Untergrund gekoppelt sind. Somit kann die Prüftrajektorie frei gewählt werden. Allerdings erfordert jede Änderung der Prüfspur eine erneute Georeferenzierung der variierten Referenzmesspunkte.

Für den praxisnahen Einsatz ist die Anzahl an notwendigen Referenzmesspunkten soweit wie möglich zu reduzieren. Dies wird durch ein Referenzsystem des Typs D erreicht, bei dem die Prüfspur vollständig von den georeferenzierten Positionen entkoppelt ist. Somit kann die Trajektorie nicht nur einmalig frei gewählt, sondern zur Herstellung verschiedener Messbedingungen variiert werden ohne dass eine erneute Georeferenzierung erforderlich ist. Daher wird in dieser Arbeit die Entwicklung eines Typ D-Referenzsystems angestrebt.

Im Folgenden werden generische Anforderungen an ein Referenzsystem des Typs D anhand der in [139] vorgeschlagenen Anforderungskategorisierung formuliert. Die Anforderungen lassen sich in strukturelle und parametrische Anforderungen unterteilen, wie die beiden Unterabschnitte 6.1.1 und 6.1.2 zeigen.

6.1.1 Strukturelle Anforderungen

Unter dem Begriff strukturelle Anforderungen werden an dieser Stelle die zu fordernden qualitativen Eigenschaften eines Referenzsystems zusammengefasst. Diese Anforderungen werden allein durch eine geeignete Konzeption des Messaufbaus erfüllt und sind unabhängig von konkreten, messtechnisch erfassbaren Größenwerten. Die Erfüllung von strukturellen Anforderungen wird durch Ja/Nein-Entscheidungen oder qualitativen Aussagen beurteilt.

Mobilität. Satellitenbasierte (z. B. GPS) oder satellitengestützte (z. B. Inertial-Messeinheiten) Ortungssysteme werden von Umgebungseinflüssen, wie z. B. hindernisbedingte Mehrwegausbreitung, beeinflusst, die günstigerweise durch die Verlegung des

Messorts variiert werden können. Eine zentrale Anforderung an den Referenzmessaufbau besteht somit darin, dass sämtliche Komponenten mit einem tolerierbaren Aufwand an einen anderen Messort verlegbar sein müssen, was bei Referenzsystemen des Typ B oder C aufgrund der Vielzahl an zu referenzierenden Referenzmesspunkten nicht der Fall ist.

Fahrzeugunabhängigkeit. Einige Ortungssysteme nutzen die Kenntnis der Fahrzeuggeometrie (Einparkhilfe) oder die Messwerte weiterer fahrzeugseitiger Messinstrumente, wie z. B. bei der satellitenbasierten Ortung in Kombination mit einem Radimpulsgeber. Diese sind fest im Fahrzeug installiert und können nicht ohne Weiteres auf ein Prüffahrzeug übertragen werden. Daher besteht eine weitere Anforderung darin, dass die fahrzeugseitigen Komponenten des Referenzsystems in ein beliebiges Fahrzeug integrierbar sein muss.

Automatisierbarkeit. Zur Herstellung der für die Prüfung spezifizierten Messbedingungen muss das Prüffahrzeug hinreichend genau entlang einer vordefinierten Prüftrajektorie geführt werden. Je nach Anwendungsfall kann hierfür eine automatische Fahrzeugführung notwendig sein. Zudem müssen die Prüfergebnisse wiederholbar sein. Somit muss im Zuge der Prüfautomatisierung ein Prüffahrzeug zur Verfügung stehen, das mit einer Fahrdynamikregelung ausgestattet werden kann und hierdurch ein wiederholbares Fahren der Prüftrajektorie ermöglicht.

Orientierung. Für eine Berechnung der absoluten Positionsabweichung ist es ausreichend, allein einen Referenzwert für die Position eines einzelnen Bezugspunkts am Prüffahrzeug zu bestimmen. Hieraus lässt sich jedoch nicht die Orientierung des Fahrzeugs ermitteln. Die Kenntnis der Fahrzeugorientierung ist die Voraussetzung, um die Messabweichung komponentenweise, d. h. längs und quer zur Fahrtrichtung, berechnen zu können. Diese Möglichkeit der komponentenweisen Analyse der Messabweichung ist insbesondere bei Anwendungen wie der Spurführung interessant, bei der typischerweise strengere Anforderungen an die Genauigkeit quer zur Fahrtrichtung als in Fahrtrichtung gestellt werden. Darüber hinaus ist die Bestimmung der Fahrzeugorientierung unerlässlich, falls das Prüffahrzeug auf Basis der Referenzmesswerte automatisch geführt werden soll. Daher muss das Referenzsystem in der Lage sein, die Orientierung in Bezug auf ein ortsfestes Koordinatensystem zu messen. Dies kann mittels einer Drehratenmessung direkt oder mittels der Ortsbestimmung mehrerer Referenzpunkte am Fahrzeug geschehen. Im letzteren Fall muss das Referenzsystem die Positionen der Referenzpunkte am Fahrzeug zeitgleich oder sequenziell in hinreichend kleinen Zeitabständen messen können.

Umwelt. Von einem mobilen Referenzsystem muss gefordert werden, dass sich die Messqualität nicht durch eine Veränderung der Umwelt verschlechtert, welche durch die Verlegung des Messorts oder der Messzeit hervorgerufen wird. Nur hierdurch kann die Reproduzierbarkeit der Prüfergebnisse gesichert werden. Das Referenzsystem darf sich somit nicht auf Technologien stützen, die nur in bestimmten Regionen nutzbar sind, wie z. B. regional begrenzte Augmentationssysteme. Des Weiteren ist zu fordern, dass die sich über Ort und Zeit verändernden Umwelteinflüsse, wie z. B. Temperatur, Nebel und Regen, die Messqualität nicht verringern.

6.1.2 Parametrische Anforderungen

Die Erfüllung der strukturellen Anforderungen stellt eine notwendige aber nicht hinreichende Voraussetzung für die Tauglichkeit einer Ortungstechnologie für ein Referenzsystem dar. Zudem müssen die parametrischen Anforderungen quantitativ erfüllt werden. Hierzu zählen naturgemäß alle metrologischen Anforderungen an die Messqualität (vgl. Kapitel 2.3), welche stets quantitativ ausgedrückt werden können.

Die Forderungen nach einer hinreichend kleinen Messunsicherheit bzw. hohen Messgenauigkeit, gegebener Konsistenz der Messwerte sowie einer geringen Latenzzeit bestehen auch für das neu zu entwickelnde Referenzsystem in unveränderter Form. Die Forderungen nach einer hohen Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit bedürfen hingegen einer detaillierteren Betrachtung. Bei einem Referenzsystem des Typs D kann das Prüffeld beliebige Form und Größe annehmen und es können – im Gegensatz zu Abschnitt 5.4 – keine äquidistanten und ortsfesten Referenzmesspunkte zur Prüfung des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems herangezogen werden. In diesem Fall muss zur Erfüllung der Verfügbarkeitsanforderung zum einen eine hinreichend hohe räumliche Abdeckung (Konfiguration des Messaufbaus) erreicht werden. Zum anderen müssen hinreichend viele Messwerte (Messrate des Messsystems) vorhanden sein, damit aus den gemessenen zeitdiskreten Positionswerten ein kontinuierlich verfügbares Positionssignal rekonstruiert werden kann.

Konfiguration. Die Anforderung an die Konfiguration des Referenzmessaufbaus orientiert sich sowohl an der Größe und der Form des Prüffelds, das von dem Referenzsystem abgedeckt werden muss. Für Fahrversuche werden üblicherweise Fahrdynamikflächen, wie z. B. [3] mit einem Durchmesser von 300 m, verwendet. Neben solchen ellipsenförmigen Prüffeldern sind verkehrstypische rechteckförmige Prüffelder mit großem Seitenverhältnis abzudecken. Die für das Prüffeld gewählte Konfiguration beeinflusst bei den meisten Ortungstechnologien die Messqualität. Beispielsweise ist bei Tachymetern

mit automatischer Objektverfolgung bei zunehmender Entfernung zum Messobjekt mit einer Verschlechterung der Messqualität zu rechnen.

Messrate. Aufgrund der digitalen Erfassung und Verarbeitung aller Messwerte stehen die Werte nicht kontinuierlich, sondern zu äquidistanten bzw. ereignisdiskreten Zeitpunkten zur Verfügung. Da die Referenzposition in der Regel nicht zum selben Zeitpunkt wie die zu verifizierende Position gemessen wird, ist für die spätere Auswertung eine Interpolation des Referenzpositionssignals erforderlich. Dies bedeutet hinsichtlich der Verfügbarkeit bzw. Zuverlässigkeit der Referenzposition, dass die Position vom Referenzsystem in so kurzen Zeitintervallen generiert werden muss, dass jede als signifikant eingestufte Änderung der Fahrzeugposition detektiert werden kann. Die Messrate des Referenzsystems muss das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem erfüllen, welches besagt, dass für eine vollständige Rekonstruktion des Fahrzeugpositionssignals die Bedingung

$$f_{\text{Ref}} \geq 2f_{\text{Frzg}}$$

einzuhalten ist. Die erforderliche Messrate f_{Ref} des Referenzsystems orientiert sich somit an der Dynamik des Fahrzeugpositionssignals, dessen Änderungsgeschwindigkeit durch f_{Frzg} charakterisiert wird. Die notwendige Messrate wurde in [139] anhand der als signifikant eingestuften Positionsänderung ermittelt, was im Folgenden verkürzt dargestellt wird.

Im Falle einer Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit kann die Fahrzeugposition selbst bei einer beliebig geringen Messrate f_{Ref} zu jedem Zeitpunkt rekonstruiert werden. Bei der Ermittlung der erforderlichen Messrate wird daher von einem Worst-case-Szenario ausgegangen. Dieses wird durch den kleinsten vorkommenden Kurvenradius r_{min} und die Maximalgeschwindigkeit v_{max} des Prüfszenarios charakterisiert.

Das Prüffahrzeug geht von einer Geradeausfahrt in eine Kurvenfahrt über und es gilt die mit $|\Delta \mathbf{x}|$ bezeichnete, kleinste als signifikant eingestufte Positionsänderung vom Referenzortungssystem zu erkennen. Die notwendige Messrate f_{Ref} für das Referenzortungssystem kann ausgehend von dem Kurvenradius r , der maximalen Geschwindigkeit v_{max} , sowie der zu erkennenden Positionsänderung $|\Delta \mathbf{x}|$ über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\Delta \mathbf{x}| &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{\text{min}} + r_{\text{min}} \cos\left(\pi - \frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}} r_{\text{min}}}\right) \\ r_{\text{min}} \sin\left(\frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}} r_{\text{min}}}\right) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -r_{\text{min}} - r_{\text{min}} \cos\left(\pi - \frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}} r_{\text{min}}}\right) \\ \frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}}} - r_{\text{min}} \sin\left(\frac{v_{\text{max}}}{f_{\text{Ref}} r_{\text{min}}}\right) \end{pmatrix} \right| \end{aligned} \quad (6.1)$$

bestimmt werden. Abbildung 6.1 visualisiert Gleichung (6.1) für die kleinste zu detektierende Positionsänderung $|\Delta \mathbf{x}| = 1$ cm was als hinreichend für die Positionsbestimmung

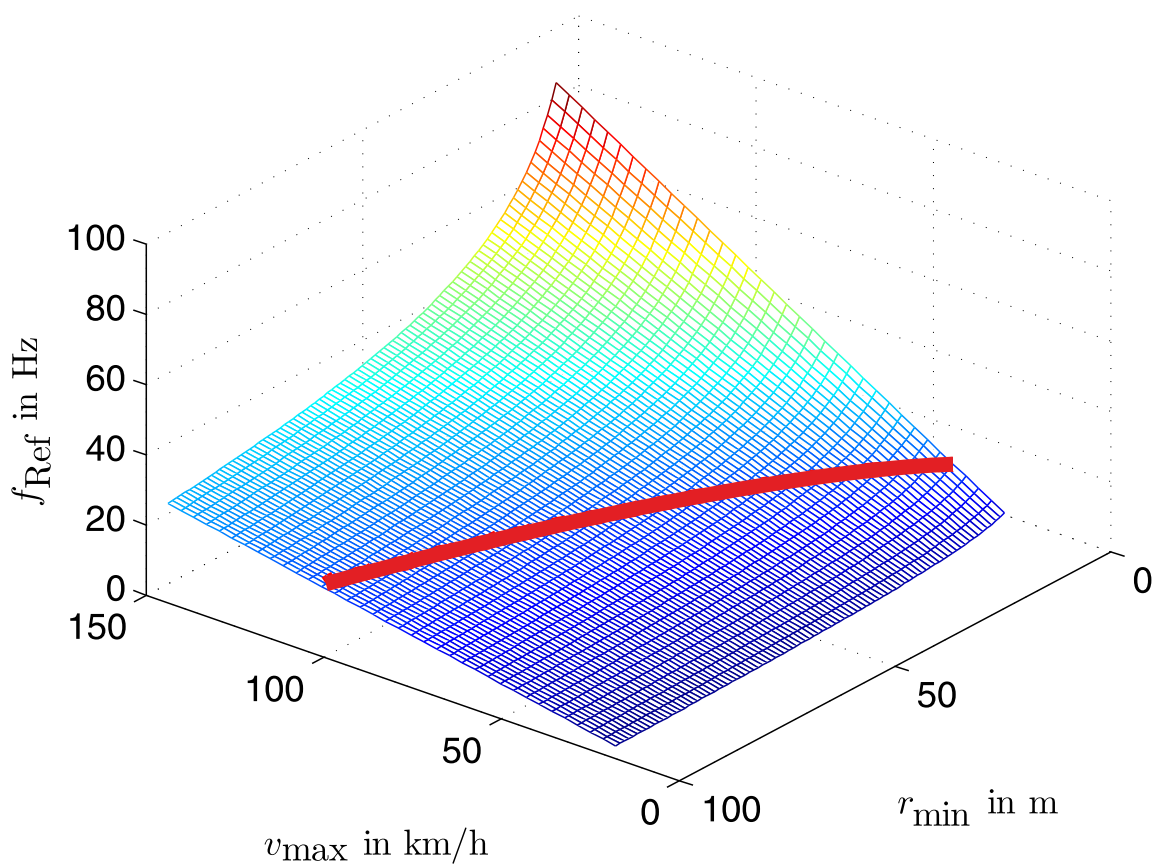


Abbildung 6.1: Notwendige Messrate f_{Ref} für $|\Delta \mathbf{x}| = 1$ cm in Abhängigkeit von r_{min} und v_{max} und die Funktion $v_{\text{max}}(r_{\text{min}})$ bei $f_{\text{Ref}} = 20$ Hz

eines Straßenfahrzeug anzusehen ist. Wie zu erwarten steigt die notwendige Messrate mit steigender Kurvenkrümmung und steigender Geschwindigkeit an. Eine Messrate von ca. $f_{\text{Ref}} = 20$ Hz ist hinreichend für realistische Kurvenradien und Fahrgeschwindigkeiten, wie der in Abbildung 6.1 eingetragene Funktionsgraph zeigt.

6.2 Gegenüberstellung und Bewertung von Ortungstechnologien

Die in Abschnitt 6.1 genannten strukturellen und parametrischen Anforderungen sind generischer Natur. Hieraus lassen sich im Hinblick auf die in der Fahrzeugtechnik gängigen Ortungstechnologien konkrete Bewertungskriterien ableiten. Der Erfüllungsgrad dieser Kriterien lässt unmittelbar auf die Erfüllung der zuvor dargestellten Anforderungen schließen, wie die folgende Gegenüberstellung und Bewertung der Ortungstechnologien zeigt.

Derzeit existieren mehrere Ortungstechnologien am Markt, deren Hersteller eine hochgenaue Positionsmessung bewegter Objekten versprechen. In dieser Arbeit werden die Technologien *Total Station*, *Local Positioning Radar*, *Local Positioning Measurement*, *Inertialortung* und *satellitengestützte Inertialortung* betrachtet, da diese prinzipiell die Realisierung eines Referenz-Fahrzeugortungssystems des Typs D ermöglichen (vgl. Abschnitt 6.1). Ihre Eignung wird anhand der Kriterien Positionsgenauigkeit, Messrate, Reichweite, direkte Sicht, Absolutposition, Orientierung, Telemetrie, Mobilität und Umgebung beurteilt. Die Anforderung der Fahrzeugunabhängigkeit spielt bei dieser Betrachtung keine Rolle, da diese von allen Systemen in Gänze erfüllt wird.

Die Kriterien *Positionsgenauigkeit*, *Messrate* und *Reichweite* spiegeln die Anforderungen nach einer hinreichend kleinen Messunsicherheit bzw. hohen Messgenauigkeit sowie einer hohen Verfügbarkeit und Zuverlässigkeit wider. Hierzu trägt ebenso das Kriterium *direkte Sicht* bei, bei dem bewertet wird, ob eine direkte Sichtlinie zwischen dem Messinstrument und dem Messobjekt zur Generierung eines Messwerts bestehen muss oder nicht. Zudem führen hochgenaue und kontinuierlich verfügbare Messwerte unmittelbar auf die Erfüllung der Konsistenzanforderung.

Das Kriterium *Orientierung* lässt sich direkt mit der gleichnamigen technischen Anforderung verknüpfen. Zusätzlich trägt es zusammen mit den Kriterien *Absolutposition* und *Telemetrie* der Anforderung nach Automatisierbarkeit Rechnung. Unter Verwendung eines Referenzortungssystems, welches lediglich eine Relativposition bereitstellt, muss die Startposition und Orientierung vor jeder Prüfmessung aufwändig manuell vermessen werden. In Bezug auf das Kriterium *Telemetrie* gilt es zu beurteilen, ob die

gemessenen Positionswerte in Echtzeit einer potenziellen Fahrzeugregelung im Fahrzeug bereitgestellt werden können und somit die metrologische Anforderung nach einer hinreichend kleinen Latenzzeit genüge getan wird.

Die Kriterien *Mobilität* und *Umwelt* repräsentieren unmittelbar die gleichnamigen strukturellen Anforderungen. Beide Kriterien werden ebenfalls qualitativ bewertet. Die Eigenschaft der gängigsten Ortungstechnologien für den Aufbau eines mobilen Referenzsystems wird im Folgenden am Beispiel repräsentativer Systeme durchgeführt.

Total-Station. Total-Stationen wurden ursprünglich für den Einsatz im Bereich des Bauingenieurwesens und der Geodäsie entwickelt. Moderne Total-Stationen sind in der Lage automatisch sich bewegenden Objekten zu folgen (autolock measurement, automatic target recognition). Eine Total-Station misst mittels eines optischen Messprinzips den Winkel und die Entfernung zu dem zu messenden Objekt ausgehend vom eigenen georeferenzierten Standort. Das Messprinzip erfordert eine direkte Sichtlinie zwischen der Total-Station und dem zu ortenden Prisma, welches auf dem Dach des Prüffahrzeugs montiert wird. Die Messqualität hängt maßgeblich von der Entfernung zwischen Total-Station und Prisma ab und wird zudem von Umwelteinflüssen, wie z. B. Dunkelheit, Regen und Nebel, beeinflusst. Die benötigte Zeit zur Bestimmung einer Position ist lang im Hinblick auf die Dynamik von Straßenfahrzeugen. Bei einer zu hohen Fahrzeuggeschwindigkeit ist die ununterbrochene Verfolgung des Prismas nicht mehr gesichert. Grundsätzlich kann nur ein Prisma während einer Messung verfolgt werden, womit die Orientierung des Fahrzeugs unbestimmt bleibt. Die mit einer geringen Messrate und außerhalb des Fahrzeugs generierten Werte, die während der Messung nicht ins Fahrzeug übertragen werden können, eignen sich nicht als Eingangswerte für eine Fahrzeugregelung.

Local Position Radar. Das in [134] vorgestellte Local Position Radar (LPR) wurde insbesondere für das Verfolgen von Fahrzeugen und Kränen entwickelt. Das LPR basiert auf dem Frequency-Modulated-Continuous-Wave-Prinzip (FMCW) [133] und wird nicht durch die Umwelt beeinflusst solange eine Sichtlinie zum Fahrzeug sichergestellt ist. Im Gegensatz zur Total-Station müssen jedoch mehrere Basisstationen georeferenziert werden, was die Mobilität einschränkt. Die Orientierung des Fahrzeugs kann bestimmt werden indem mehrere auf dem Fahrzeugdach montierte Antennen geortet werden. Der Betrieb einer Fahrzeugregelung gestaltet sich problematisch, da die moderate Messrate des Gesamtsystems mit jeder weiteren Antenne entsprechend reduziert wird.

Local Position Measurement. Das Funktionsprinzip der in [125] eingeführten Local Position Measurement (LPM) Technologie ist ähnlich der des LPR-Systems. Auch in diesem Fall ist das Funktionsprinzip auf FMCW-Basis invers zu dem Prinzip satellitenbasierter Ortung. Das zu ortende Objekt stellt einen aktiven Transponder dar, der von passiven Basisstationen umgeben ist [94]. Die LPM-Technologie wurde speziell für Ortungsaufgaben in den Bereichen Sport, industrielle Fahrzeuge und Flugshows entwickelt. Hieraus resultiert die Fähigkeit eine 3D-Position mit einer Messrate von 1000 Hz zu ermitteln. Diese hohe Messrate erlaubt prinzipiell die Entwicklung einer Fahrzeugregelung auf Basis von LPM-Messwerten.

Inertialmessung. Die aus Beschleunigungsmessern und Gyroskopen bestehenden Inertialmesssysteme sind im Bereich Fahrzeugautomatisierung weit verbreitet [55, S. 215-216][87, S. 33]. Die Komponenten sind fahrzeugseitig installiert, wodurch die Messwerte in Echtzeit im Fahrzeug zur Verfügung stehen. Es wird keine externe Infrastruktur benötigt, womit die Notwendigkeit einer direkten Sichtverbindung entfällt. Dies führt auf eine unbegrenzte Reichweite und auf einen hohen Grad an Mobilität. Gleichzeitig stellen diese Eigenschaften jedoch den größten Nachteil von Inertialmesssystemen dar: Da kein absoluter Bezug zur Umgebung besteht, entsteht eine Drift, die zu einer rapiden und im Allgemeinen nicht abschätzbaren Verschlechterung der Positionsgenauigkeit im Laufe der Messzeit führt [41, S. 133].

Satellitenunterstützte Inertialmessung. Zur Reduzierung der Driftabhängigkeit werden Inertialmesssysteme üblicherweise durch eine satellitenbasierte Positionsmessung gestützt, wodurch eine Absolutposition erreicht wird. Hierdurch ist die Satellitenunabhängigkeit nicht mehr gegeben. Die Satellitenunabhängigkeit ist jedoch die Voraussetzung für die Erkennung systematischer Effekte und ist daher zentraler Bestandteil der Definition eines Referenzsystems (vgl. Definition 1).

Fazit der Beurteilung

Tabelle 6.2 fasst die Charakteristika der betrachteten Technologien zur Auswahl einer geeigneten Technologie zusammen. Die Symbole '+', 'o' und '-' kennzeichnen den Eignungsgrad der Technologie für den beabsichtigten Anwendungsfall eines Typ D-Referenzsystems. Für Ja/Nein-Kriterien werden die Symbole '✓' und '✗' verwendet.

Total-Stationen versprechen die beste Performanz bzgl. der Positionsgenauigkeit. Hierbei handelt es sich jedoch um geschlossene und fahrzeugexterne Systeme, die eine multiple Positionserfassung und letztlich eine Fahrzeugregelung auf Basis der Referenzpo-

Tabelle 6.2: Bewertung der Ortungstechnologien

Technologie	Trimble Total-Station S8 DR Plus TM [130]	Symeo LPR LPR-2D [127]	inmotiotec LPM LPM wireless [1]	OxTS INS RT3000 family [89]	OxTS INS+GNSS RT3002 [88]
Genauigkeit ¹⁾	4 mm + 2 ppm (1 σ)	5 cm	3 cm	0,05%, 3 cm/s	2 cm (1 σ)
Messrate	2,5 Hz	25 Hz	1000 Hz	100 Hz	100 Hz
Reichweite	2500 m	400 m	1000 m	∞	∞
Direkte Sicht	✗	✗	✗	✓	✓
Absolutposition	✓	✓	✓	✗	✗
Orientierung	✗	✓	✓	✓	✓
Telemetrie	✗	✓	✓	✓	✓
Mobilität	+	O	O	+	+
Umgebung	–	O	O	+	+
Fazit	–	+	+	–	–

¹⁾ Die Positionsgenauigkeit ist aufgrund inhomogener und mehrdeutiger Genauigkeitsdefinitionen der Hersteller kaum vergleichbar.

sitionswerte unmöglich machen. Daher scheiden Total-Stationen als Referenzortungssysteme aus. Die Genauigkeit von Inertialmesssystemen sinkt rapide im Laufe der Zeit, sodass die Wiederholbarkeit der Messungen nicht gegeben ist. Eine Kompensation der Drift mittels der satellitenbasierten Ortung widerspricht der Definition des Referenzsystems. Die FMCW-basierten Technologien LPR und LPM kristallisieren sich als die vielversprechendsten heraus. Für den Entwurf des Referenzortungssystems wird aufgrund der höheren Messrate und der 3D-Fähigkeit die LPM-Technologie ausgewählt. Hierzu ist eine Anpassung der in [100] beschriebenen Standardkonfiguration des LPM-Systems an die Bedürfnisse der Straßenfahrzeugortung notwendig, welche im folgenden Abschnitt aufgezeigt wird.

6.3 Messaufbau des mobilen Referenzsystems

Die Aufgabe des mobilen Referenzsystems besteht in der satellitenunabhängigen Bestimmung einer Referenzposition für eine auf dem Fahrzeugdach montierte Antenne. Neben der Referenzposition ist der Gierwinkel des Fahrzeugs in Bezug auf ein ortsfestes Koordinatensystem zu ermitteln. Dabei sind die in Abschnitt 6.1 aufgezeigten Anforderungen zu erfüllen. Hierfür wurde ein Messaufbau auf Basis der in Abschnitt 6.2 ausgewählten LPM-Technologie entwickelt [144]. Seine Systemarchitektur zeigt dieser Abschnitt, wobei die Beschreibung in die Erläuterung der verwendeten Komponenten und der Datenfusion unterteilt ist.

6.3.1 Komponenten des Referenzsystems

Die Architektur des Referenzsystems zeigt Abbildung 6.2. Die folgende Erläuterung der Architektur gliedert sich in das zu prüfende Ortungssystem, das Referenzsystem und die Trajektorienvisualisierung.

Zu prüfendes Ortungssystem. Als Beispiel für ein zu prüfendes Ortungssystem dient an dieser Stelle erneut GPS. Die verwendete GPS-Antenne ist hinsichtlich ihres Montageorts dauerhaft auf einem Dachträger fixiert. Der Dachträger dient der einfachen Montage aller Antennen des Messaufbaus auf einem beliebigen Prüffahrzeug sowie der Fixierung der geometrischen Anordnung der Antennen zueinander. Der GPS-Empfänger stellt seine Messdaten entsprechend dem NMEA 0183-Standard [19] über eine serielle Schnittstelle zur Verfügung. Zur späteren zeitlichen Zuordnung und der Bewertung der Latenz wird zusätzlich das Puls-per-second-Signal (PPS) an das Referenzsystem übertragen.

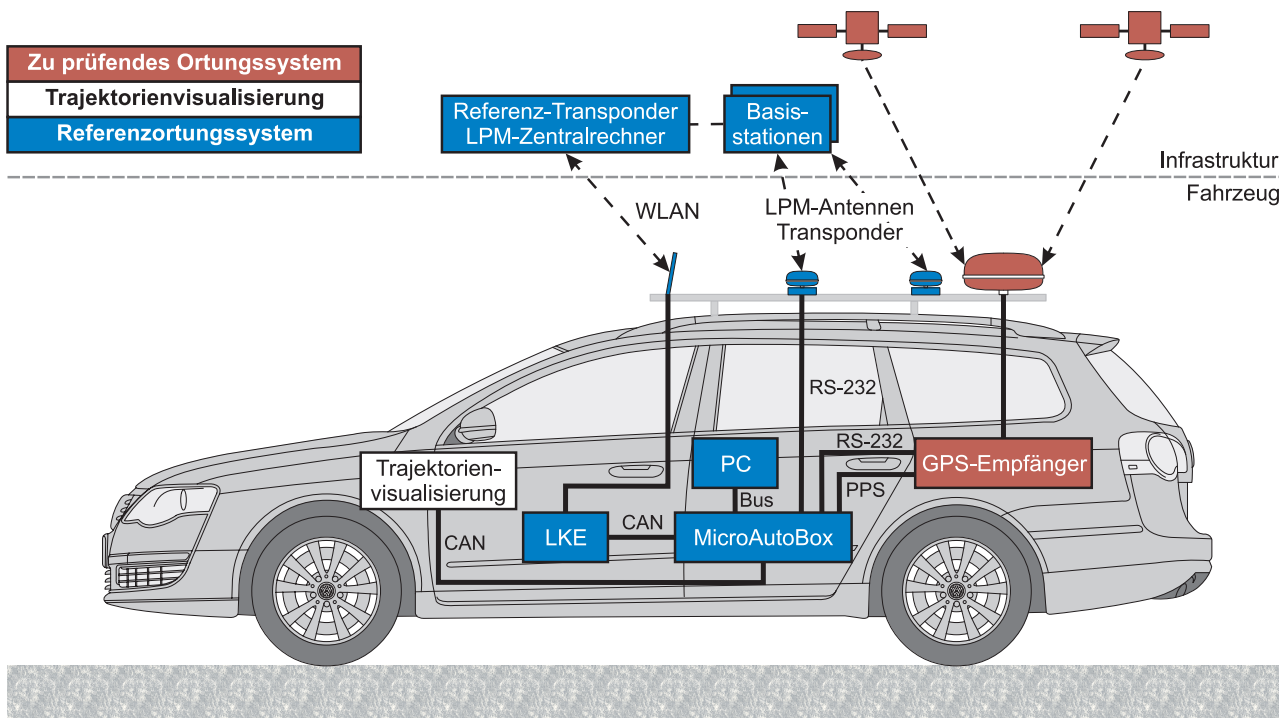


Abbildung 6.2: Architektur des mobilen Referenzsystems am Beispiel der satellitenbasierten Ortung

Komponenten des Referenzortungssystems. Die Position der Antenne des zu prüfenden Ortungssystems sowie die Fahrzeugorientierung wird mittels der Positionen zweier LPM-Antennen bestimmt, welche vom Referenzortungssystem gemessen werden. Beide LPM-Antennen sind jeweils mit einem Fahrzeug-Transponder verbunden. Einer der Fahrzeug-Transponder verfügt über die Möglichkeit Telemetriedaten über eine serielle Schnittstelle aus dem Fahrzeug zu empfangen. Eine zusätzliche WLAN-Antenne ermöglicht die Übertragung der LPM-Messdaten während der Fahrt ins Fahrzeug. Die fahrzeugexternen Komponenten bestehen aus bis zu 12 Basisstationen, einem Referenz-Transponder und einem darin integrierten Zentralrechner. Die Basisstationen werden um das Messfeld verteilt platziert und einmalig bzgl. ihrer Antennenposition georeferenziert. Der Referenz-Transponder wird an einer beliebigen Position innerhalb des Messfeldes platziert und ebenfalls georeferenziert. Seine zeitinvariante und bekannte Position ermöglicht die Zeitsynchronisation der dezentralen LPM-Komponenten. Der LPM-Zentralrechner berechnet aus den jeweiligen Entfernungen zwischen den Basisstationen und den Fahrzeug-Transpondern die Positionen der LPM-Antennen und sendet diese an das Fahrzeug. Die LPM-Kommunikationseinheit (LKE) dient als Konverter für die drahtlos übertragenen LPM-Messdaten und stellt diese über den CAN-Bus der MicroAutoBox bereit. Hier werden die Messdaten des Referenzortungssystems und die zu qualifizierenden Messdaten mit einem einheitlichen Zeitstempel versehen und zur späteren Nachbearbeitung gespeichert. Die MicroAutoBox sendet während der Mes-

sung die aktuelle Systemzeit an den LPM-Transponder. Zudem werden die aktuellen Messdaten beliebigen Zusatzkomponenten, wie z. B. der Trajektorienvisualisierung, per CAN-Bus zur Verfügung gestellt. Ein an die MicroAutoBox angeschlossener Rechner (PC) dient der Steuerung des Referenzsystems.

Trajektorienvisualisierung. Zur Prüfung der Funktionstüchtigkeit des Referenzsystems und der ersten Beurteilung der Messwerte dient die Trajektorienvisualisierung. Die Trajektorienvisualisierung stellt auf Basis der über den CAN-Bus bereitgestellten Daten die Prüftrajektorie, die Referenztrajektorie und die zu qualifizierende Trajektorie (vgl. Abbildung 2.1) in Echtzeit dar.

6.3.2 Datenfusion des Referenzsystems

Abbildung 6.3 visualisiert die Datenfusion des Referenzsystems unterteilt in die Phasen *Vorverarbeitung*, *Messprozess* und *Nachbearbeitung*. Die Vorverarbeitung besteht in der Erstellung einer digitalen Karte. Die Karte enthält zum einen zwei geodätisch vermessene Referenzmesspunkte im WGS84-Format. Zum anderen sind die Referenzmesspunkte und die Positionen aller Basisstationsantennen in einem Tachymeter-eigenen kartesischen Koordinatensystem verzeichnet. Mit Hilfe dieser Referenzmesspunkte wird die zunächst im lokalen Koordinatensystem ermittelte Referenzposition während des Messprozesses in das globale WGS84-Koordinatensystem transformiert. Da die beiden Referenzmesspunkte zeitinvariant sind, lassen sie sich über einen beliebig langen Zeitraum beliebig genau georeferenziert.

Während des Messprozesses wirkt sich der Zustand \mathbf{Z} der Fahrzeugdynamik auf die Messgröße *Position* beider Ortungssysteme aus. Der GPS-Empfänger bestimmt die Position der GPS-Antenne im WGS84-Format. Analog dazu werden die Positionen der beiden LPM-Antennen vom LPM-System ermittelt. Zusätzlich werden die Positionen der Basisstationen in das WGS84-Format konvertiert und für die Nachbearbeitung zur Verfügung gestellt.

Bei der Nachbearbeitung werden sowohl die vom GPS-Empfänger gemessenen Positionen als auch die vom LPM-System gemessenen in gleicher Weise vom WGS84-Koordinatensystem, über das Gauß-Krüger-System (GK) in ein lokales, kartesisches Koordinatensystem (BSKS) überführt. Dieses lokale Koordinatensystem orientiert sich, wie Abbildung 6.4 zeigt, am Aufstellungsort der Basisstationen und dient der Vereinfachung der Berechnung der indirekten Messgrößen *Referenzposition* \mathbf{x}_{Ref} und *Gierwinkel* Ψ . Der Dachträger fixiert die vermessene geometrische Anordnung der Antennen zueinander, wobei L_1 den Abstand der GPS-Antenne zur hinteren LPM-Antenne in

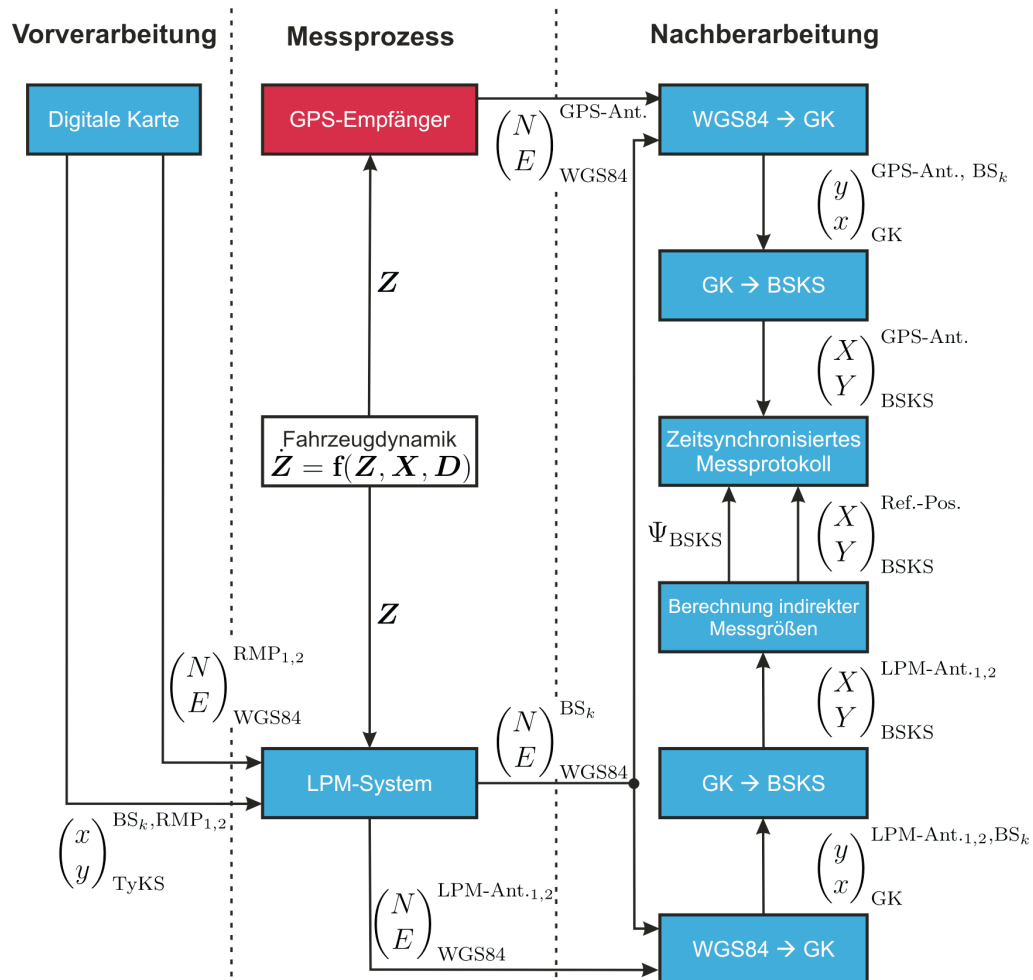
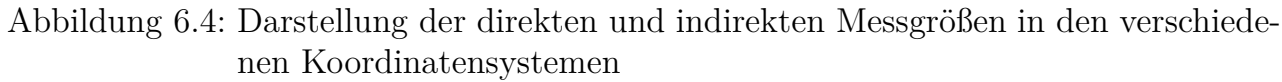


Abbildung 6.3: Darstellung der Datenfusion des Referenzsystems



Fahrtrichtung und L_2 den dazu orthogonalen Abstand bezeichnet. Somit ergibt sich die Referenzposition \mathbf{x}_{Ref} für die GPS-Antenne unmittelbar aus den direkt gemessenen Positionen $\mathbf{x}_{\text{LPM},1}$ und $\mathbf{x}_{\text{LPM},2}$ der LPM-Antennen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_3 &= \mathbf{x}_{\text{LPM},1} - \mathbf{x}_{\text{LPM},2} \\ \mathbf{r}_4 &:= \begin{pmatrix} r_{3,Y} \\ -r_{3,X} \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_2 &= L_2 \frac{\mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r}_4\|} \\ \mathbf{r}_1 &= L_1 \frac{\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|} \\ \mathbf{x}_{\text{Ref}} &= \mathbf{x}_{\text{LPM},2} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Vektornorm. Der Gierwinkel ist dann

$$\Psi_{\text{BSKS}} = \begin{cases} \arctan \frac{r_{3,Y}}{r_{3,X}}, & \text{falls } r_{3,X} \geq 0 \\ \arctan \frac{r_{3,Y}}{r_{3,X}} + 180^\circ, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeitsynchronisierung der Messwerte. Bei der Messung zeitvarianter Größen spielt die unvermeidbare Zeitdauer zwischen dem Erfassen eines Messwerts und dem ersten möglichen Zugriffszeitpunkt eine entscheidende Rolle. Daher müssen die Latenzzeiten der Referenz und des zu prüfenden Ortungssystems bei der Nachbereitung Berücksichtigung finden. Die Latenzzeit des Referenzsystems kann exakt ermittelt werden. Hierzu sendet die MicroAutoBox zu jedem Messtakt die Systemzeit über einen Telemetrikanal an einen der beiden LPM-Transponder. Dieser Zeitstempel wird mit den Messdaten gekoppelt und durch die gesamte Messkette übertragen. Beim Empfang eines neuen Positionswerts durch die MicroAutoBox wird der daran gekoppelte Zeitstempel mit der aktuellen Systemzeit verglichen. Die Differenz stellt die Latenzzeit dar. Im Fall der satellitenbasierten Ortung wird das PPS-Signal genutzt, das unmittelbar an der MicroAutoBox anliegt und den Zeitpunkt des Umschaltens einer Sekunde der GPS-Systemzeit kennzeichnet. Die über die serielle Schnittstelle verzögert eintreffenden GPS-Messdaten werden mittels der Flanke des PPS-Signals dem tatsächlichen Messzeitpunkt zugeordnet.

Nach einer anschließenden Interpolation aller Referenzsignale steht ein zeitlich synchronisiertes Messprotokoll zur Verfügung, das für jeden Zeitpunkt der Messung Referenzwerte für die Position und Ausrichtung des Fahrzeugs vorhält. Hierauf aufbauend erfolgt die Beurteilung der Messqualität des zu prüfenden Ortungssystems.

6.4 Kalibrierung des mobilen Referenzsystems

Vor der Nutzung eines Messsystems ist im Allgemeinen eine Kalibrierung zur Identifizierung signifikanter systematischer Effekte vorzunehmen. Bei der Kalibrierung stellt die Messabweichung die Messgröße dar (vgl. Abschnitt 2.2). Mit der Durchführung einer Kalibrierung wird die GUM-Forderung erfüllt, „daß alle Anstrengungen unternommen wurden, um solche Einflüsse zu erkennen“ und zu korrigieren [29, S. 11]. Entsprechend dem Prinzip der metrologischen Rückführbarkeit kann jedes Messsystem durch eine Kette von Kalibrierungen auf ein als Urmaß anerkanntes Normal zurückgeführt werden. Das in diesem Kapitel vorgestellte mobile Referenzsystem wird im Folgenden anhand des in Kapitel 5 beschriebenen Normals für die Fahrzeugortung kalibriert.

Die Kalibrierung wird auf dem in Abbildung 5.1 gezeigten Prüfgelände durchgeführt. Eine kreisförmige Anordnung der LPM-Basisstationen um das zu ortenden Objekt stellt die optimale Betriebsanordnung für das zu kalibrierende Referenzsystem dar. Bei der Kalibrierung ist jedoch geländebedingt eine rechteckförmige Anordnung mit großem Seitenverhältnis erforderlich. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Messqualität im späteren Betrieb mindestens so hoch ist, wie die bei der Kalibrierung festgestellte.

Zur Prüfung, ob signifikante systematische Einflüsse das Messergebnis beeinflussen, werden an dieser Stelle zwei Szenarien betrachtet. Im ersten Szenario wird die Fahrzeugposition im zeitinvarianten Fall betrachtet, um so das Messverfahren und hierbei insbesondere die Referenzierung der Basisstationen und die Genauigkeit der Algorithmen zur Koordinatenumrechnung zu beurteilen. Im zweiten Szenario wird geprüft, in wie weit sich die festgestellte systematische Abweichung durch die Fahrzeugdynamik verändern.

Im ersten Szenario wird der Träger der Antennen für das LPM-System und das GPS derart in der Mitte des Messfeldes positioniert, dass sich die GPS-Antenne auf einem georeferenzierten Referenzmesspunkt befindet. Das Ortungsnormale stellt in diesem Fall einen konstanten Wert für die Referenzposition bereit. Anhand von 10000 Messungen wurde für die systematische Messabweichung ein Wert von $\Delta_s^{\text{bek.}} = -61,1 \text{ cm}$ ($u_{\Delta_s^{\text{bek.}}} = 0,5 \text{ cm}$) in X - bzw. ein Wert von $\Delta_s^{\text{bek.}} = -31,3 \text{ cm}$ ($u_{\Delta_s^{\text{bek.}}} = 0,8 \text{ cm}$) in Y -Richtung bestimmt. Als maßgebliche Ursachen für diese Abweichung werden an dieser Stelle die Bestimmung und Übertragung der Basisstationskoordinaten und die Umrechnung der lokalen Positionswerte über das kartesische UTM-Koordinatensystem in das letztlich geforderte WGS84-Koordinatensystem vermutet. Die Koordinatenumrechnung stellt durch die Unsicherheiten bei der Algorithmen-Parametrierung grundsätzlich eine Herausforderung dar, die im Fachgebiet der Geodäsie tiefgehend erforscht wird [40]

und in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet wird. Es genügt an dieser Stelle, die systematische Abweichung zu identifizieren und bei weiteren Messungen zu korrigieren.

Im zweiten Szenario wird das Prüffahrzeug entlang der X -Achse durch das Prüffeld, d. h. mittig auf der Straße, bewegt, um so den Einfluss der Fahrzeugdynamik auf die festgestellte systematische Abweichung zu untersuchen. Hierbei wurde für die mittlere Messabweichung ein Wert von $\Delta_s^{\text{bek.}} = -66,3 \text{ cm}$ bestimmt. Bei der Feststellung der Messabweichung wird neben der Typ-A-Unsicherheit resultierend aus der endlichen Anzahl von Messwerten – im Gegensatz zum ersten Szenario – die vollständige Messunsicherheit des Ortungsnormals (vgl. Unterabschnitt 5.2.6) berücksichtigt. Die Messunsicherheit insgesamt ergibt sich zu $u_{\Delta_s^{\text{bek.}}} = 5,8 \text{ cm}$. Es ist festzustellen, dass sich die gemessenen systematischen Messabweichungen im stationären und dynamischen Fall unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten im Einklang befinden und daher keine zusätzliche Korrektur aufgrund der Fahrzeugdynamik angebracht werden muss.

Die Kalibrierung des mobilen Referenzsystems am Ortungsnormal zeigt, dass die Genauigkeit des Referenzsystems – unter Berücksichtigung der Messunsicherheit des Normals – sich durch die Fahrzeugdynamik nicht signifikant verschlechtert und dies trotz der problematischen Anordnung des Messaufbaus. Daher darf die zur Korrektur benutzte systematische Messabweichung ohne Beschränkung der Allgemeinheit anhand der Stillstandsmessung bestimmt werden.

Fazit. Die Erprobung des entwickelten mobilen Referenzsystems auf dem Gelände der PTB zeigt, dass das mobile Referenzsystem die notwendigen Referenzpositionswerte zur Bestimmung der Qualitätsmaßzahlen bereitstellen kann. Die in Abschnitt 6.1 genannten strukturellen und parametrischen Anforderungen *Mobilität*, *Fahrzeugunabhängigkeit*, *Automatisierbarkeit*, *Orientierung*, *Umwelt*, *Konfiguration* und *Messrate* sind erfüllt. Daher stellt der entwickelte mobile Referenzmessaufbau eine mögliche Implementierung des für einen Prüfprozess benötigten Referenzsystems dar.

KAPITEL 7

Quantifizierung der Messqualität mit Hilfe des mobilen Referenzsystems

Für eine Erprobung der erarbeiteten Qualitätsmaße und des entwickelten Referenzsystems ist die Definition und Durchführung eines exemplarischen Prüfprozesses notwendig. Seine Durchführung und Auswertung wird in diesem Kapitel dargestellt. In Abschnitt 1.3 wurde anhand von Abbildung 1.2 der Zusammenhang zwischen der Qualifizierung, der Verifizierung und der Validierung in generischer Form aufgezeigt. Dieses Schema kann für den Anwendungsfall der satellitenbasierten Ortung konkretisiert werden, wie Abbildung 7.1 illustriert. Aus Sicht eines Prüflabors wird ein Prüfprozess durchgeführt, dessen Ergebnis aus der quantifizierten Messqualität, d. h. aus den ausgewerteten Qualitätsmaßen, besteht (Qualifizierung). Zudem ist der Abgleich der Qualitätsmaßzahlen mit den validierten Qualitätsgrenzen durchzuführen (Verifizierung). Vom Anwender des Ortungssystems wird ausgehend vom intendierten Verkehrsszenario eine Ortungstechnologie ausgewählt. Zusätzlich müssen Prüfscenarien spezifiziert werden, in denen die Leistungsfähigkeit des ausgewählten Ortungssystems festgestellt werden soll. Weiterhin dient das intendierte Verkehrsszenario als Grundlage für die Spezifizierung und Validierung von Anforderungen an die Messqualität, deren Erfüllung letztlich über die Konformität des zu prüfenden Ortungssystems entscheidet.

Zur Quantifizierung aller Eigenschaften der Messqualität müssen Parameterwerte gewählt werden, wie es beispielsweise bei der Verfügbarkeitskontinuität der Fall ist („Das

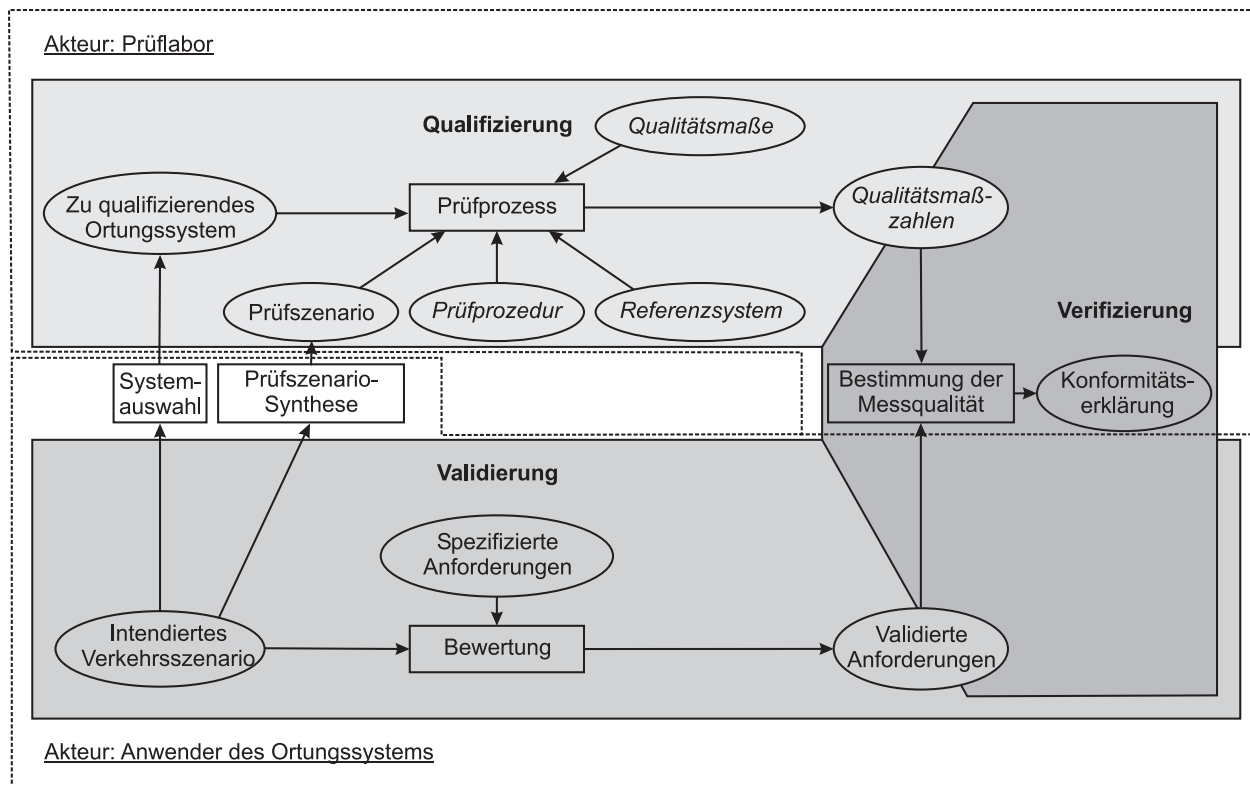


Abbildung 7.1: Ablauf einer Konformitätsbewertung eines Ortungssystems

Positionssignal muss mindestens 20 Werte lang ununterbrochen verfügbar sein.“, vgl. Abschnitt 2.4). Es ist jedoch hierfür nicht erforderlich, konkrete, aus einem Verkehrsszenario resultierende, Forderungen an die Werte der Maßzahlen, wie z. B. „Die der Verfügbarkeitskontinuität zugeordnete Wahrscheinlichkeit muss größer als 90% sein.“ zu stellen. Die Maßzahlen der Messqualität können somit unabhängig von konkreten Anforderungen an die selbigen bestimmt werden. Dies entspricht dem neutralen Qualitätsbegriff im Sinne der *Beschaffenheit* der Werte (lat. *qualitas* = Beschaffenheit). Das Ergebnis eines Prüfprozesses ist die neutrale Feststellung der Messqualität wie beispielsweise „Die der Verfügbarkeitskontinuität zugeordnete Wahrscheinlichkeit ist 99%.“ und keine wertende Angabe wie „Die Verfügbarkeitskontinuität ist für das intendierte Verkehrsszenario ausreichend hoch.“. Letztere würde bereits die Berücksichtigung eines konkreten Anwendungsfalls und eine subjektive Beurteilung bedingen. Der wertende Qualitätsbegriff ist Gegenstand der Verifizierung, bei der die *Güte* der Werte anhand konkreter Anforderungen an ihre Beschaffenheit beurteilt wird. Hierbei werden die bei der Qualifizierung festgestellten Qualitätsmaßzahlen mit den validierten Qualitätsgrenzen verglichen, um so die Tauglichkeit des zu qualifizierenden Ortungssystems festzustellen.

Gegenstand des im Folgenden beschriebenen Prüfprozesses ist der GPS-Empfänger EVK-6H der Firma u-blox mit der Filtereinstellung *Automotive*. Die Qualität der Po-

sitionswerte wird neben dem Empfänger selbst durch die verwendete Antenne und ihren Montageort beeinflusst. In diesem Fall wird die Antenne GPS-702-GG der Firma NovAtel genutzt, die entsprechend Abbildung 6.2 auf dem Fahrzeugdach montiert ist. Dadurch wird der bestmögliche Empfang hinsichtlich des Montageorts sichergestellt. Weitere Ressourcen des Prüfprozesses stellen die Qualitätsmaße aus Kapitel 2, das in Kapitel 6 beschriebene Referenzsystem und die Prüfprozedur dar. Die Prüfprozedur besteht aus dem methodischen Vorgehen und berücksichtigt sowohl die Begriffsdefinitionen als auch das Messverfahren des Referenzsystems (Abschnitt 6.3) sowie seine metrologische Rückführung (Abschnitt 6.4). Eine weitere Ressource ist das Prüfzenario, das im folgenden Abschnitt spezifiziert wird.

7.1 Definition des Prüfzenarios

Gemäß Abbildung 7.1 ist das Prüfzenario in Abhängigkeit des intendierten Verkehrsszenarios bzw. der im Prüfprozess zu quantifizierenden Einflüsse auf die Messqualität zu entwerfen. Zur Spezifizierung von Prüfzenarios wurden für den in [65] vorgestellten Szenariensimulator generische Szenarienparameter sowie realitätsnahe Wertebereiche identifiziert. Eine zusammenfassende Darstellung bietet Tabelle 7.1, die Intervalle aufzeigt, aus denen Werte für die relevanten Parameter des zu spezifizierenden Prüfzenarios auszuwählen sind. Zur Untersuchung des Einflusses eines Szenarienparameters auf die Messqualität ist es erforderlich, diesen zu variieren und dabei die weiteren Parameter bestmöglich konstant zu halten. Hierbei müssen sämtliche Messreihen unter Vergleichsbedingungen durchgeführt werden (vgl. Unterabschnitt 2.3.2). An dieser Stelle wird beispielhaft der Einfluss der Fahrzeugdynamik auf Qualität der Messwerte untersucht. Daher stellen neben dem Prüfgelände die dort zu fahrenden Prüftrajektorien die maßgeblich festzulegenden Parameter des Prüfzenarios dar.

7.1.1 Wahl des Prüfgeländes

Zur Quantifizierung der Messqualität ist eine hinreichend große Anzahl von Messwerten erforderlich. Daher bietet es sich an, die Prüfung auf einer abgesperrten Dynamikfläche durchzuführen. Hier ist die Definition von geschlossenen Prüftrajektorien möglich, was eine beliebige Länge der Messreihen ermöglicht. Zudem sind die Umgebungsbedingungen über die gesamte Messzeit bekannt und unveränderlich. Als Prüfgelände wurde eine Freifläche der Heinrich-der-Löwe-Kaserne in Braunschweig gewählt, deren Umgebungsbedingungen einen optimalen Empfang der Satellitensignale erwarten lassen. Des Weiteren erlaubt dieses Prüfgelände ein rechteckförmiges Prüffeld. Hierdurch bleibt die Rückführbarkeit der Messergebnisse auf die Kalibrierung auf dem Gelände der PTB

Tabelle 7.1: Parameterraum für Prüfzenarien

Kategorie	Parameter	Wertebereich	Bemerkung
GNSS	GPS	-	
	Galileo	-	
Zeit	GPS-Woche	[0 2000]	Durch die Angabe der GPS-Zeit ist die Satellitenkonstellation eindeutig festgelegt.
	Wochentag	[0 6]	
	Stunde	[0 23]	
	Minute	[0 59]	
Atmosphäre	Temperatur	[-20 +40]	
	Feuchtigkeit	[0 100]	
Hindernisse	Breite	[0 ∞)	
	Höhe	[0 ∞)	
	Position	beliebig	
	Signaldämpfung	[0 ∞)	
Antennen- trajektorie	Spur Geschwindigkeitsprofil	beliebig beliebig	Durch die Angabe der Antennentrajektorie ist das Prüfgelände implizit festgelegt.

gewahrt, bei der ebenfalls eine rechteckförmige Anordnung des Referenzmessaufbaus angesetzt wurde. Abbildung 7.2 zeigt die Anordnung der streckenseitigen Komponenten des Referenzortungssystem auf dem Gelände der PTB während der Kalibrierung (oben) und auf dem Gelände der Heinrich-der-Löwe-Kaserne während der Durchführung des Prüfzenarios (unten). Die Berechnung des HDOP-Werts in Abhängigkeit der Aufstellungsorte der Basisstationen basiert auf den Ausführungen in [116]. Die Konturlinien geben den HDOP-Wert der LPM-Anordnung in dem jeweiligen Bereich des Messfeldes an. Es zeigt sich anhand der HDOP-Werte, dass die schlauchförmige Geometrie während der Kalibrierung, unter Berücksichtigung der Öffnungswinkel der versetzt zueinander positionierten Antennen, den Worst-case hinsichtlich aller möglichen Messanordnungen darstellt. Dies wird durch die schmale und durch Pflanzenbewuchs begrenzte Straße unausweichlich verursacht. Ausgehend hiervon darf bei einer realitätsnäheren Messanordnung, d. h. einer Anordnung mit kleinerem Seitenverhältnis, von einer höheren Genauigkeit ausgegangen werden. Die im unteren Teil der Abbildung dargestellte Anordnung ist ein Beispiel hierfür. Der HDOP-Wert liegt im gesamten Messfeld unter 1. Daher ist eine mindestens so hohe Horizontalgenauigkeit wie die bei der Kalibrierung festgestellte gesichert.

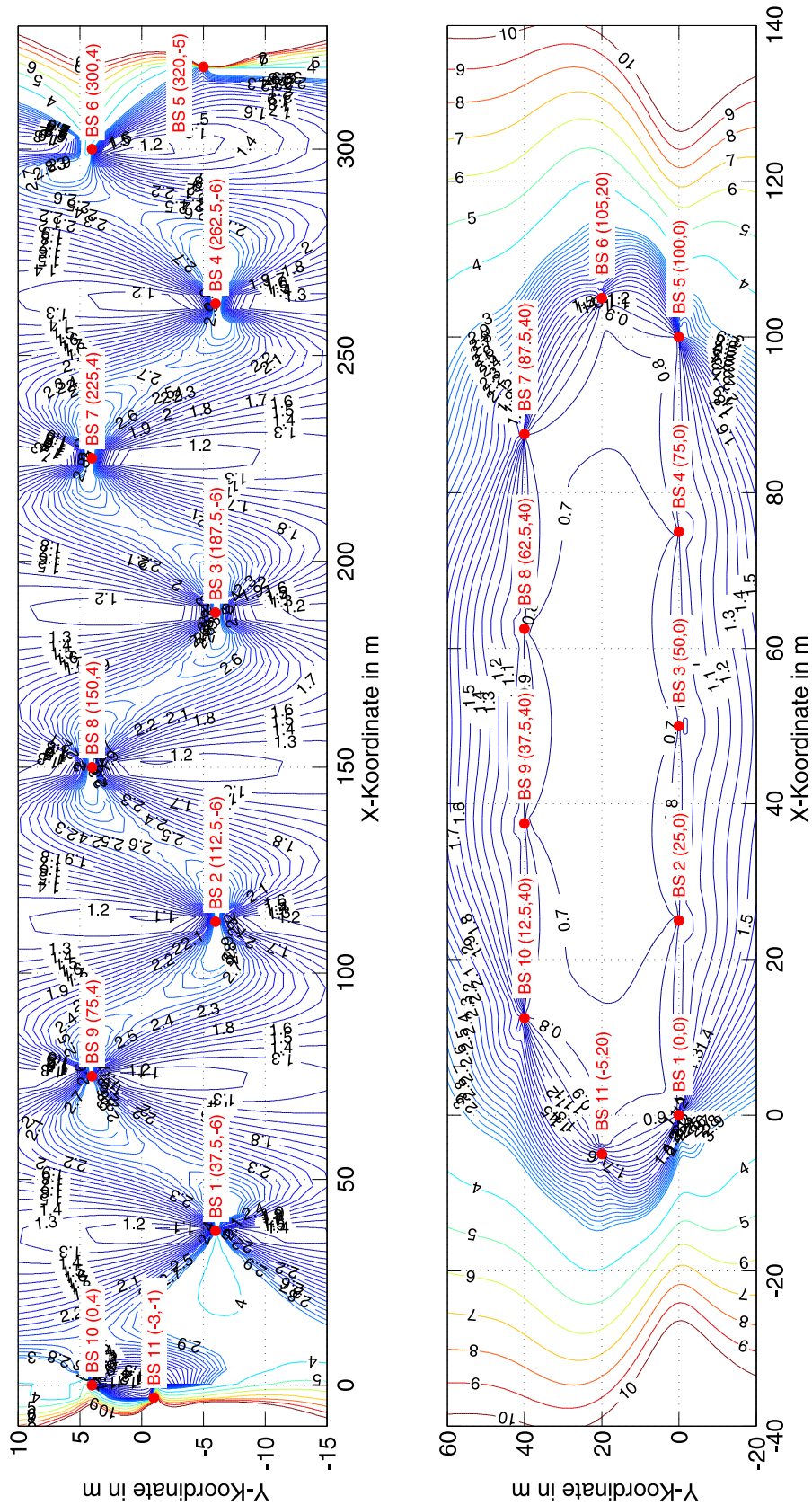


Abbildung 7.2: Visualisierung des Dilution of Precision bei der Kalibrierung (oben) und bei dem Prüfprozess (unten)

7.1.2 Wahl der Prüftrajektorien

Zur Analyse des Einflusses der Fahrzeugdynamik auf die Qualität der Positionsbestimmung stehen verschiedene Trajektorien zur Wahl wie beispielsweise eine Trajektorie mit hoher Geschwindigkeit bei Geradeausfahrt, eine Trajektorie mit moderater Geschwindigkeit bei einer Kreisfahrt oder eine Trajektorie mit geringer Geschwindigkeit beim Fahren einer achtförmigen Spur. Zur Erreichung einer hohen Geschwindigkeit wird ein sehr langes Prüffeld benötigt, wobei die Erreichung dessen Endes die Dauer der Prüfmessung stark begrenzt. Sowohl die Geradeausfahrt als auch die Kreisfahrt weisen eine konstante Bewegungsrichtung bzw. konstante Änderung der Bewegungsrichtung auf, sodass die Position vom zu prüfenden Ortungssystem auch im Falle einer Signalunverfügbarkeit durch den intern verwendeten Filteralgorithmus näherungsweise fortgeschrieben werden kann. Bei der achtförmigen Spur ändert sich die Richtungsänderung in jedem Zeitschritt. Eine derartige Spur stellt die herausforderndste Prüfspur hinsichtlich der Fahrzeugdynamik dar und wird daher ausgewählt.

Abbildung 7.3 zeigt die generierte Prüftrajektorie auf dem Prüfgelände. Die achtförmige Spur kreuzt in der Mitte des Prüffeldes orthogonal. Zur Untersuchung des Einflusses der Fahrzeuggeschwindigkeit wird die Prüfspur jeweils mehrfach mit 2 m/s, 4 m/s und 7 m/s durchfahren. Die Wiederholbedingung *Fahrzeugdynamik* wird hierbei durch ein geregeltes Fahrzeug des Instituts für Verkehrssystemtechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt sichergestellt.

7.2 Quantifizierung der GPS-Messqualität

Im Folgenden werden die Messergebnisse des im vorherigen Abschnitt beschriebenen Prüfzenarios gezeigt. Es gilt die bei der Durchführung erlangten Messwerte hinsichtlich ihrer Messqualitätseigenschaften entsprechend der in Abschnitt 2.4 definierten Qualitätsmaße bzgl. jeder gefahrenen Trajektorie zu quantifizieren. Zur Untersuchung des Einflusses der Fahrzeuggeschwindigkeit auf die Messqualität ist es notwendig, die weiteren Einflussfaktoren auf das Messergebnis konstant zu halten. Die Umgebung um das Prüffeld ist während der Messung konstant und beeinflusst aufgrund des Abstands zum Prüffeld nicht die Sichtlinie zwischen Fahrzeug und Satelliten am Himmel. Einflüsse durch die Atmosphäre können aufgrund der kurzen Messdauer ebenfalls als konstant angenommen werden. Die maßgeblich zu überprüfende Messbedingung stellt die Satellitenkonstellation dar, die in Abbildung 7.4 gezeigt ist. Der sogenannte Skyplot zeigt alle gesichteten Satelliten aufgetragen nach ihren IDs und den jeweiligen Elevations- und Azimuthwinkel. Die gemessene Winkeländerung aus Sicht des Empfängers ist minimal. Während der Messung ist kein zusätzlicher Satellit gesichtet worden und zu keinem

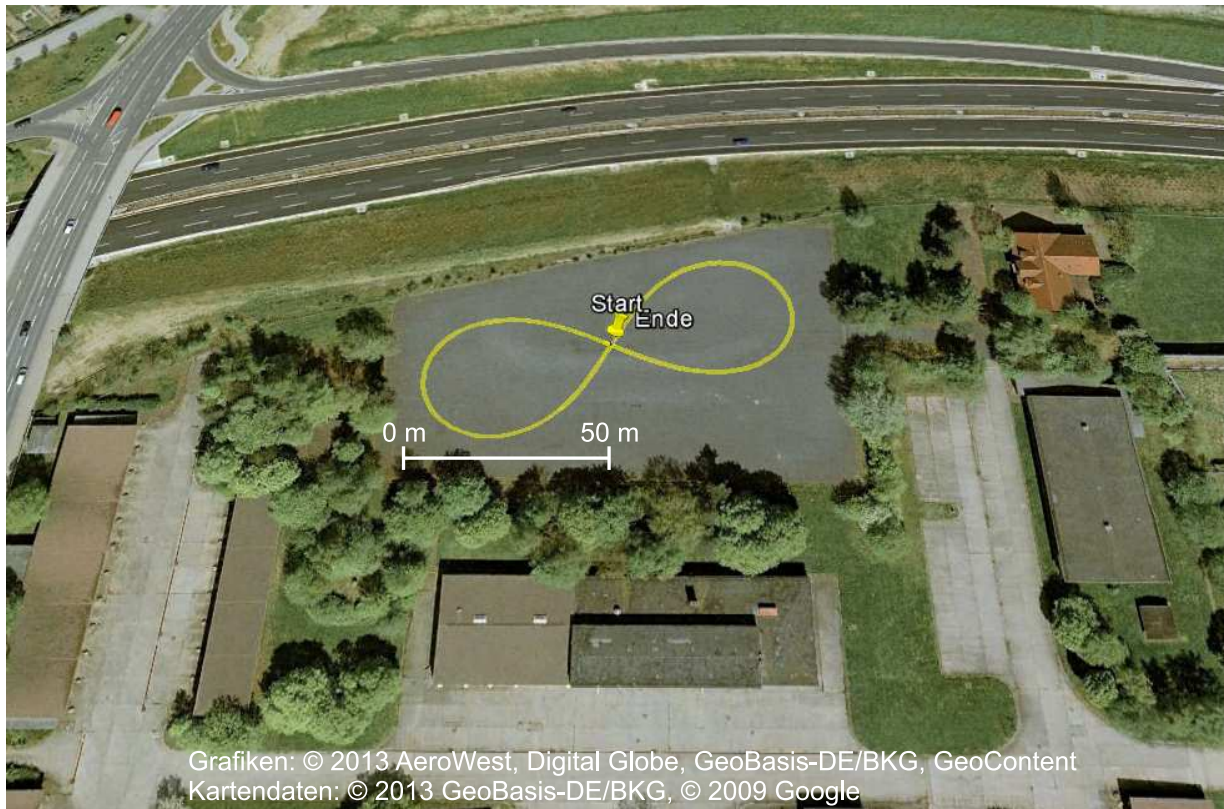


Abbildung 7.3: Darstellung der Prüftrajektorie auf dem Prüfgelände

Satellit ist die Sichtverbindung durch Verschwinden hinter dem Horizont unterbrochen worden, sodass die Satellitenkonstellation als hinreichend konstant angenommen werden kann.

Abbildung 7.5 zeigt die quantifizierte Messungenauigkeit im Vergleich zwischen den drei Prüftrajektorien. Im linken Teil der Abbildung ist jeweils der Verlauf der Referenzposition und der GPS-Position dargestellt. Der rechte Teil der Abbildung zeigt die hieraus ermittelte Messabweichung der GPS-Position. Zudem sind der Mittelwert und das 95%-Intervall der Messabweichung eingezeichnet. Unter Berücksichtigung der Unsicherheit der an die Referenzpositionen angebrachten Korrektur, der Unsicherheit der mit einer DGPS-Station georeferenzierten Referenzpunkte auf dem Prüffeld und der Dynamik des zur Glättung der Referenzpositionen verwendeten Tiefpassfilters stellt sich eine stationäre Messunsicherheit für die Referenzpositionen von 2,7 cm (95%-Intervall) ein. Diese Unsicherheit der Referenz im Zentimeterbereich ist im Hinblick auf die Skalierung der Koordinatenachsen nicht eingezeichnet und für diese Messung vernachlässigbar. Des Weiteren sind die in der Abbildung gezeigten Messwerte um die gemessene Latenzzeit der Referenz bzw. des GPS bereinigt, um so die tatsächliche Messabweichung analysieren zu können. Der empirische Standardabweichung der einzelnen Runden von 12,6 cm zeigt, dass die Fahrzeugdynamik sehr gut von Runde zu Runde durch das geregelte Prüffahrzeug wiederholt werden konnte. Daher werden die für eine Quantifizierung der

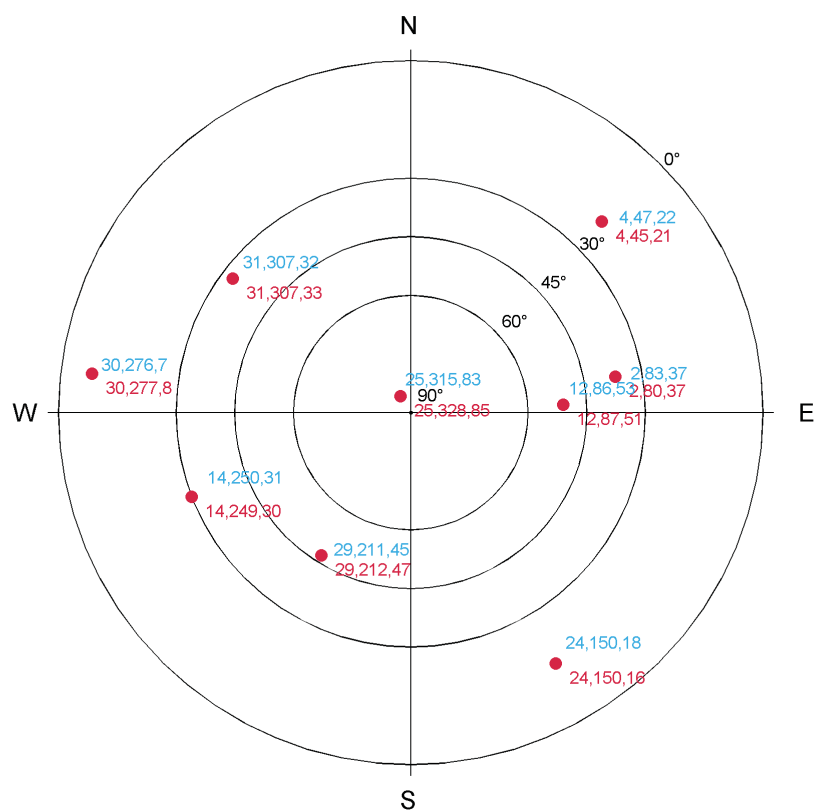


Abbildung 7.4: Darstellung der gesichteten Satelliten

Tabelle 7.2: Quantifizierung der Verfügbarkeitsmerkmale

Merkmal	Größe	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Punktverfügbarkeit	P_{PV}	100%	99,8%	24%
Zuverlässigkeitsfunktion	P_{Z, Ξ_V}	100%	99,9%	23%
Unzuverlässigkeitsfunktion	$P_{UZ, \Xi_{UV}}$	0%	0%	47%

Genauigkeit notwendigen Wiederholbedingungen (vgl. Abschnitt 2.3) als gegeben betrachtet. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Messabweichung bei den niedrigeren Geschwindigkeiten 2 m/s bzw. 4 m/s vergleichbar groß ist, im zweiten Fall jedoch bereits ein deutlicher Ausreißer außerhalb des 95%-Intervalls auftritt. Bei einer Geschwindigkeit von 7 m/s zeigt sich eine deutliche Zunahme der Messabweichung auf 2,5 m im Mittel. Die Messabweichung der satellitenbasierten Ortung während dieser Messung ist trotz der in Abbildung 7.4 dargestellten hohen Anzahl an sichtbaren, gleichmäßig verteilten Satelliten und einer daraus resultierenden sehr niedrigen Horizontal Dilution of Precision zu groß in Anbetracht von Anforderungen wie die spurselektive Fahrzeugortung. Im Allgemeinen lassen ein HDOP-Wert im Bereich 1-2 und die gleichmäßige Satellitenverteilung eine exzellente Horizontal-Genauigkeit erwarten. Dies lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres auf Szenarien mit hoher Fahrzeugdynamik übertragen, wie die dargestellte Messung zeigt, sodass für anspruchsvolle Ortungsaufgaben entsprechende Komplementärsensorik erforderlich ist.

Die Konsistenz der GPS-Positionswerte ist gemäß der mit $\zeta = 3$ parametrisierten Konsistenzbedingung für alle Messwerte erfüllt (vgl. Abschnitt 2.4). Die bei den drei Messungen gemittelte Latenzzeit der GPS-Werte schwankt zwischen 159 ms und 164 ms, ist näherungsweise als konstant anzunehmen und wird, wie erwartet, nicht durch die verschiedenen Fahrzeuggeschwindigkeiten beeinflusst. Die Quantifizierung der Verfügbarkeits- und Zuverlässigkeitsmerkmale *Punktverfügbarkeit*, *Zuverlässigkeitsfunktion* und *Unzuverlässigkeitsfunktion* ist in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Bei der Prüfung der Verfügbarkeitsbedingung wurde die Intervalllänge $\Xi_V = \Xi_{UV} = 20$ angesetzt sowie der Grenzwert $MPE_V = 2$ m vorgegeben, d. h. Positionswerte, deren Messabweichung den Wert MPE_V übersteigt, wurden als unverfügbar betrachtet. Bei der ersten Messung beträgt die der Punktverfügbarkeit zugeordnete Wahrscheinlichkeit 100%, sodass sich die der Zuverlässigkeit zugeordneten Wahrscheinlichkeiten unmittelbar ergeben. Trotz des einzelnen Ausreißers bei der zweiten Messung wird ein ähnliches Ergebnis erreicht. Die höhere Messabweichung bei der dritten Messung liegt wiederkehrend und für längere Zeiträume oberhalb des Grenzwerts MPE_V . Daher ist eine geringe Verfügbarkeit bzw. Zuverlässigkeit festzustellen.

Über die Analyse der absoluten Messabweichung hinaus, ermöglicht die Positionsmessung von zwei Bezugspunkten am Fahrzeug durch das Referenzsystem die Bestimmung

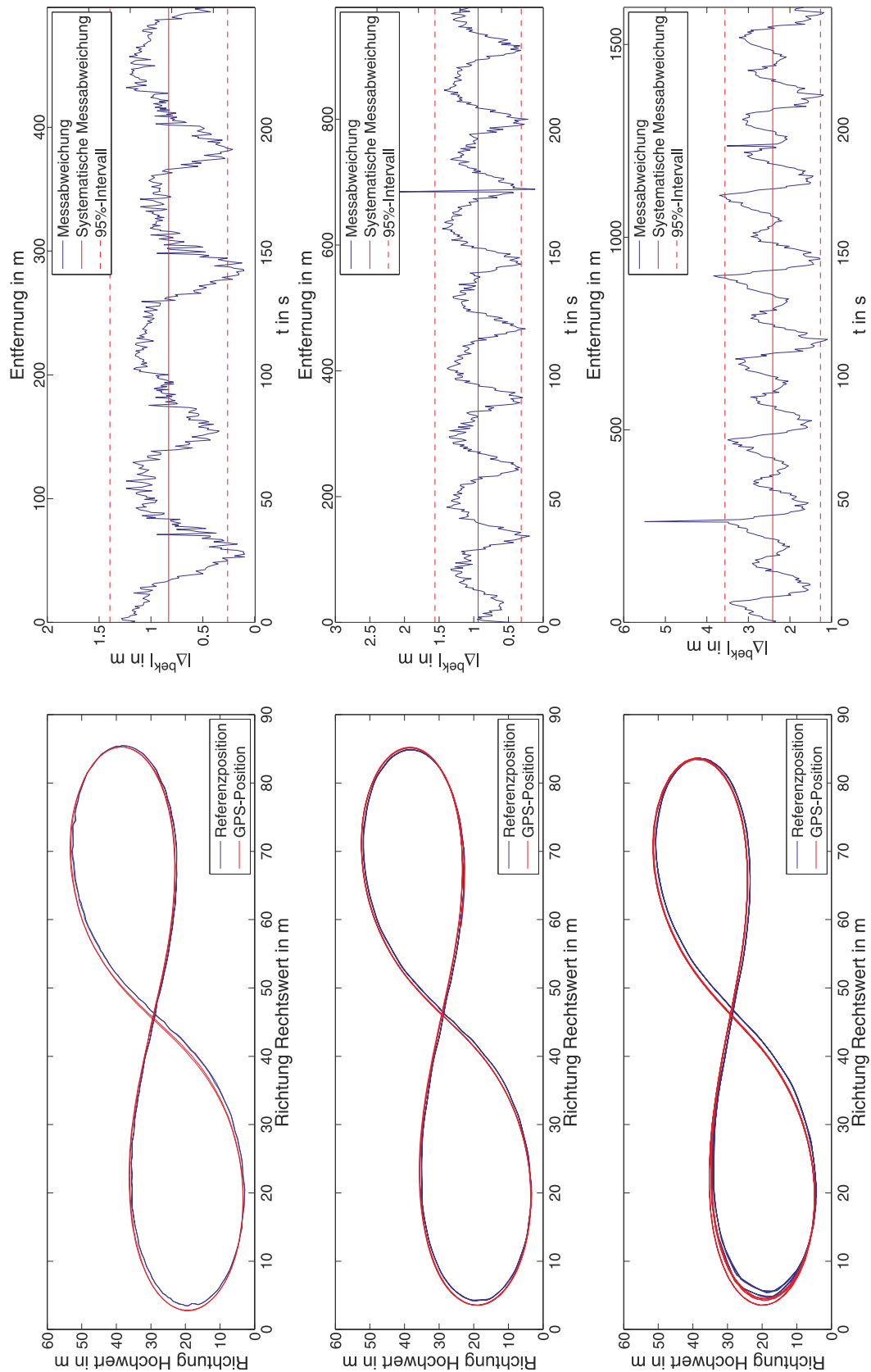


Abbildung 7.5: Gegenüberstellung der quantifizierten Messgenauigkeiten bei Messung 1 mit 2 m/s (oben), Messung 2 mit 4 m/s (mitte) und Messung 3 mit 7 m/s (unten)

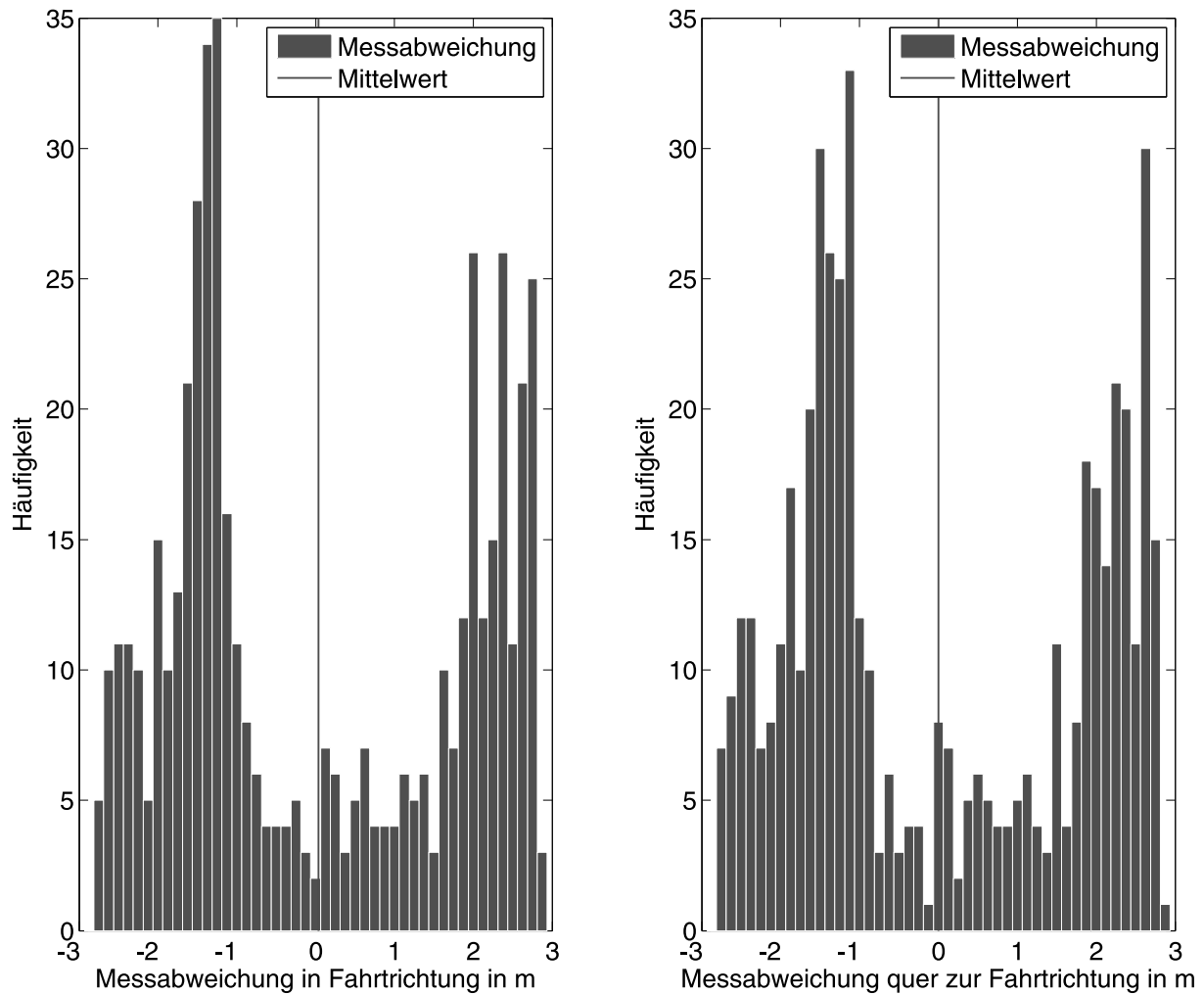


Abbildung 7.6: Festgestellte Messabweichungen längs und quer zur Fahrtrichtung bei Messung 3 mit 7 m/s

des Fahrzeuggierwinkels. Hierdurch kann die Messabweichung komponentenweise, d. h. längs und quer zur Fahrtrichtung berechnet werden. Diese Art der Betrachtung ist insbesondere bei Anwendungen wie der automatischen Spurführung interessant, bei der eine Genauigkeit quer zur Fahrtrichtung von wenigen Dezimetern zu fordern und eine vergleichsweise geringe Genauigkeit in Längsrichtung zulässig ist. Die Komponenten der Messabweichung sind für Messung 3 in [Abbildung 7.6](#) dargestellt. [Abbildung 7.6](#) zeigt symmetrische Häufigkeitsverteilungen, was durch die symmetrische Form der Prüftrajektorie verursacht wird. Die größten Messabweichungen von bis zu 3 m treten im Mittelpunkt der achtförmigen Trajektorie auf, welcher aus beiden Richtungen durchfahren wird. Es ist deutlich die Auswirkung der systematischen Abweichung der GPS-Messwerte von den Referenzmesswerten zu erkennen. Der geprüfte Empfänger erfüllt unter den hier vorliegenden Messbedingungen offensichtlich nicht die hohen Genauigkeitsanforderungen wie sie beispielsweise bei der spurgenaue Fahrzeugortung bestehen.

KAPITEL 8

Zusammenfassung und Ausblick

Der folgende Abschnitt [8.1](#) bietet eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit. Zunächst wird die initiale Motivation der Arbeit rekapituliert. Das methodische Vorgehen zur Bearbeitung der daraus resultierenden Problemstellung wird resümiert und die dabei erlangten Ergebnisse herausgestellt. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf weiterführende Forschungsarbeiten in Abschnitt [8.2](#).

8.1 Zusammenfassung

Durch die Einführung von global verfügbaren Ortungssystemen hat sich ein breites Anwendungsspektrum für Ortungsfunktionen insbesondere im Verkehrswesen entwickelt. Bislang stellten nicht sicherheitsrelevante Anwendungen wie die Navigation den Haupteinsatzbereich für Ortungssysteme dar. Zukünftige Anwendungen werden hingegen hohe Ansprüche an die Messqualität der Positionsinformationen stellen. Anwendungsbeispiele im Straßenverkehr sind z. B. ein Einfädelassistent auf der Autobahn, ein Querverkehrsassistent, der den Fahrer vor herannahenden Fahrzeugen aus einer Querstraße warnt oder das langfristige Ziel des automatisierten Fahrens. Neben den Anwendungen im Straßenverkehr stellen zudem die gleisselektive Ortung im Schienenverkehr oder die satellitengestützte Führung von Flugzeugen im Terminalbereich weitere Anwendungen einer hochgenauen und verlässlichen Ortung dar. Eine derartige Ortung trägt nicht nur zur Steigerung der Verkehrssicherheit sondern auch zur Rechts-

sicherheit bei, wie das Beispiel der korrekten Abrechnung fahstreifenselektiver Maut zeigt.

Bei allen genannten Anwendungen für Ortungsdienste besteht stets die Forderung, dass neben der technischen Zuverlässigkeit des Ortungssystems die hinreichende metrologische Qualität der gelieferten Positionswerte nachgewiesen werden muss. Die Prüfung, ob die von einem Ortungssystem bereitgestellten Positionswerte die Qualitätsanforderungen der jeweiligen Anwendung erfüllen, muss von einer unabhängigen Stelle nach einem systematischen und allgemein akzeptierten Verfahren durchgeführt werden. Erst eine solche Prüfung schafft die technische und juristische Sicherheit für den Einsatz von Ortungssystemen bei sicherheitsrelevanten und juristisch bedeutsamen Anwendungen.

Aufgrund der hohen Verbreitung, der meist kostenlosen und globalen Verfügbarkeit sowie des großen Potentials bzgl. zukünftiger Anwendungen wurde in dieser Arbeit die satellitenbasierte Ortung von Straßenfahrzeugen fokussiert. Gegenstand der Prüfung ist der zeitliche Verlauf der Fahrzeugpositionswerte, welche vom betrachteten Empfänger ausgegeben werden. Der Prüfung der metrologischen Leistungsfähigkeit kann eine Untersuchung des Empfängers mit Hilfe einer Hardware-in-the-loop-Simulation vorausgehen, bei der der Empfänger mit künstlich erzeugten Satellitensignalen gespeist wird. Diese können mit Hilfe von Signalgeneratoren oder sogenannten Pseudolites erzeugt werden. Hierbei können die vom Empfänger berechneten Werte mit Sollwerten verglichen werden, um so die formale Korrektheit der Empfänger-Funktionen zu prüfen. Dabei stellt sich das Problem, dass eine Simulation niemals die Realität vollständig nachbilden kann und ihre Realitätsnähe verifiziert werden muss. Insbesondere die realitätsnahe Modellierung der zeitvarianten Umgebung bereitet große Schwierigkeiten. Daher ist die Durchführung von realen Versuchen unabdingbar.

Die Untersuchung von Empfängern bzgl. ihrer Positionsgenauigkeit unter Realbedingungen setzt eine satellitenunabhängige Referenzposition voraus. Es wurden einige bestehende Ansätze zur Generierung einer solchen Referenzposition aufgezeigt. Diesen Ansätzen ist gemein, dass die fundierte Beurteilung der Qualität des Referenzsystems nach metrologischen Standards bzw. die Rückführung des genutzten Referenzsystems auf ein genaueres Ortungsnormale vernachlässigt wird. Das Prinzip der Rückführung der Messung einer zeitvarianten Position auf den einfacheren Fall der Messung einer zeitinvarianten Position wird ignoriert.

Die durchgeführte Literaturrecherche hat gezeigt, dass der Begriff *Messqualität* – insbesondere für die Messung zeitvarianter Größen – nicht allgemeingültig definiert ist. Die satellitenbasierte Fahrzeugortung repräsentiert eine Klasse von Messungen, für die eine umfassende und allgemein akzeptierte Angabe der Messqualität bislang nicht möglich war. Die Zielsetzung dieser Arbeit bestand daher zum einen in der formalen Axiomatisierung des Begriffs *Messqualität* und der Beantwortung der Fragestellung, wie diese

Qualität zu quantifizieren ist. Zum anderen bestand die Zielsetzung aus dem Entwurf eines satellitenunabhängigen, mobilen Referenzsystems und seiner Rückführung auf das existierende Referenzsystem auf dem Gelände der PTB, welches als Ortungsnormaldient.

In Kapitel 2 wurde die Axiomatisierung der Messqualität nach dem Schema *Begriff, Eigenschaft, Merkmal, Größe* durchgeführt. Hierbei wurden bestehende Begriffsdefinitionen aus der Metrologie in konsistenter Weise in die Begriffshierarchie eingefügt sowie Begriffe aus den Fachgebieten Informatik und technische Zuverlässigkeit entlehnt und mit z. T. modifizierten Definitionen integriert. Neben dem zentralen Begriff *Messqualität* wurden weitere bei einem Prüfprozess auftretende Begriffe definiert, um ein harmonisiertes Verständnis der weiteren Vorgehensweise zu ermöglichen. Für die Quantifizierung der Eigenschaften der Messqualität *Messgenauigkeit, Konsistenz, Latenz, Verfügbarkeit* und *Zuverlässigkeit* wurden eigene Qualitätsmaße definiert.

Zur Beurteilung der verwendeten Referenz-Ortungssysteme wurde das international akzeptierte GUM-Rahmenwerk zur Quantifizierung der Eigenschaft *Messunsicherheit* in Kapitel 3 rekapituliert. Hierbei wurde sowohl das Standard-GUM-Verfahren als auch der Monte-Carlo-Ansatz zur Behandlung nichtlinearer Messfunktionen behandelt.

Da mit diesem Rahmenwerk lediglich zeitinvariante Messgrößen betrachtet werden, wurde in Kapitel 4 das Standard-GUM-Verfahren auf die Modellform *Zustandsraummodell* methodisch erweitert, um so auch zeitvariante Messgrößen, gemessen mit dynamischen Messsystemen, berücksichtigen zu können. Die Herleitung eines Modells für die Messunsicherheit bei dynamischen Messsystemen hat gezeigt, dass eine Analyse der zeitvarianten Messunsicherheit in Echtzeit mit Hilfe von wohlbekannten Methoden aus der Theorie linearer Systeme möglich ist. Das Verhalten der Messunsicherheit hinsichtlich der Stabilität wurde an zwei Beispielen illustriert. Es zeigte sich, dass die Messunsicherheit über alle Grenzen wachsen, gegen einen stationären Wert konvergieren oder sich wieder verringern kann.

Kapitel 5 erläutert die Funktionsweise des ortsgebundenen Referenzsystems auf dem Gelände der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig. Die Messqualität seiner Positionswerte wurde nach dem GUM-Leitfaden beurteilt und rechnergestützt verifiziert. Die weiteren Eigenschaften der Messqualität wurden anhand einer Messfahrt quantifiziert. Es hat sich gezeigt, dass die festgestellten Qualitätsmaßzahlen, insbesondere die Messunsicherheit von ($u_{\delta\bar{x}} = 1,2 \text{ cm}$, $u_{\delta\bar{y}} = 2,7 \text{ cm}$), hinreichend für ein Ortungsnormald zur Qualifizierung satellitenbasierter Ortungssysteme ist.

Die Qualifizierung von Ortungssystemen für deren Einsatz bei sicherheitsrelevanten Anwendungen bedingt ein Referenzsystem, das die Prüfung unter realen Messbedingungen erlaubt. Mit Hilfe der bei der Prüfung gewonnenen Referenzmesswerte können dann die

auf der Häufigkeitsstatistik beruhenden Qualitätsmaße ausgewertet werden. Das hierfür erforderliche Referenzsystem muss neben den metrologischen weitere technische, aus dem Prüfprozess resultierende, Anforderungen erfüllen. Daher wurden in Kapitel 6 zunächst Anforderungen an Referenzsysteme im Allgemeinen spezifiziert und anschließend die LPM-Technologie im Rahmen einer Technologiebeurteilung ausgewählt. Auf Basis dieser Ortungstechnologie wurde ein mobiles, satellitenunabhängiges Referenzsystem entwickelt. Eine Kalibrierung des mobilen Referenzsystems am zuvor nach dem GUM-Verfahren beurteilten Ortungsnorm stellt die Rückführung der Messung einer zeitvarianten Position durch das mobile Referenzsystem auf die Messung ortsfester Positionen sicher.

Die abschließende Erprobung des mobilen Referenzsystem anhand eines exemplarischen Prüfzenarios in Kapitel 7 verdeutlicht. Es zeigt sich, dass die Generierung einer zeitvarianten Referenzposition für die satellitenbasierte Ortung in hinreichender Qualität möglich ist. Eine weitere Erkenntnis aus dieser Arbeit ist, dass sich das universelle Verständnis des Begriffs *Messqualität* in jeder Beurteilung von Werten zeitvarianter Messgrößen widerspiegelt. Obwohl sich die drei in dieser Arbeit betrachteten Messsysteme Ortungsnorm-PTB, mobiles Referenzsystem und GPS hinsichtlich ihres Messverfahrens fundamental unterscheiden, wurde die jeweilige Messqualität stets in gleicher Weise entsprechend der Begriffsaxiomatisierung analysiert. Somit kann sowohl der methodische Teil als auch der technisch-experimentelle Teil der Zielstellung als erfüllt angesehen werden.

8.2 Ausblick

Vor der Nutzung von Ortungssystemen als Basis für das hoch- oder vollautomatisierte Fahren und die fahrstreifenselektive Mauterhebung [152] sind sowohl bzgl. des rechtlichen Rahmens als auch bei den in dieser Arbeit behandelten technischen Fragestellungen weiterführende Forschungsleistungen zu erbringen. Wie in der Einführung dargelegt, befindet sich das teilautomatisierte Fahren, bei dem Ortungsdienste dem Fahrzeugführer unterstützend zur Seite stehen, im Einklang mit dem derzeitigen rechtlichen Rahmen. Anders stellt sich dies dar, wenn Ortungssysteme Teil eines hoch- oder vollautomatisierten Fahrzeugs sind. Die Frage der Haftung im Falle eines Unfalls, der beispielsweise durch eine zu ungenaue oder kurzzeitig nicht verfügbare Ortung verursacht wird, ist nach wie vor ungeklärt. Hier ist eine Modifizierung des derzeitigen rechtlichen Rahmens wie z. B. der StVO an die Gegebenheiten des hoch- und vollautomatisierten Verkehrs erforderlich [39, S. 25]. Die Schadensersatzverpflichtung könnte im Falle einer Fehlfunktion durch neuartige Versicherungsmodelle geregelt werden, wie z. B. durch die in [56, S. 210] geforderte paritätische Versicherung zwischen Hersteller

und Fahrzeughalter. Des Weiteren muss Klarheit darüber geschaffen werden, welches unvermeidliche, aus den wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen resultierende Restrisiko beim Einsatz von Ortungssystemen in hochgradig automatisierten Fahrzeugen gesellschaftlich akzeptiert wird [39, S. 23].

Neben diesen offenen juristischen und ethischen Fragen sind ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen bzgl. der Qualität der Fahrzeugortung in weiterführender Weise zu behandeln. Dies trifft sowohl auf die Harmonisierung der Fachsprache als auch auf die Methoden der theoretischen und angewandten Metrologie zu.

Die hier vorgeschlagenen Fachbegriffe für die Qualifizierung von Fahrzeugortungssystemen stellen eine wichtige, wenn auch nicht abschließende, Basis für eine vereinheitlichte und allgemein akzeptierte Prüfprozedur dar. Für eine Verabschiedung allgemein gültiger Begriffsdefinitionen im normativen Rahmen bedarf es weiterer Abstimmung in den zuständigen Fachausschüssen auf nationaler und internationaler Ebene, welche sich typischer Weise aus den verschiedenen Fachrichtungen Metrologie, Fahrzeugautomatisierung sowie Luft- und Raumfahrttechnik zusammensetzen.

Hinsichtlich der methodischen Ansätze zur Beurteilung der Messunsicherheit stellt das vorgestellte GUM-Rahmenwerk die wesentliche Grundlage dar. Allerdings weist das Verfahren Schwächen und Grenzen auf, wie in dieser Arbeit und anderen genannten Veröffentlichungen gezeigt wurde. Daher wird der GUM-Leitfaden stets ein „vital document“ [6] bleiben, das es stetig zu hinterfragen und zu verbessern gilt. Die Einbeziehung von Filtertechniken [52] in die standardisierte Messunsicherheitsbeurteilung und deren vollständige Umstellung auf die Bayes-Statistik [70] scheint absehbar.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden weitere Anwendungsgebiete für die hier vorgestellten Referenzsysteme abseits der Qualifizierung von Ortungssystemen identifiziert. Ein nach internationalen metrologischen Standards wie dem GUM-Verfahren beurteiltes bzw. zurückgeführtes Fahrzeugortungssystem kann für die Verifizierung von Fahrzeugmodellen und Fahrzeugregelalgorithmen genutzt werden, wie in [143] aufgezeigt wurde. Das modellierte Beschleunigungsverhalten und der Verlauf des Lenkwinkels schlägt sich letztlich in einer Position-Zeit-Beziehung nieder, die es zu verifizieren gilt. Die bei Versuchen und realen Bedingungen entstehende Differenztrajektorie zwischen simuliertem und realem Verlauf kann mit Hilfe eines Referenzortungssystems bestimmt werden. In weiterführenden Arbeiten ist eine Methode zu erforschen, wie aus einer Menge von Differenztrajektorien auf die Modellqualität in struktureller („*Neigung der Straße nicht modelliert.*“) und parametrischer Art („*Luftwiderstandsbeiwert zu groß angesetzt.*“) geschlossen werden und das Modell entsprechend optimiert werden kann.

Neben der Thematik der in einem Prüfprozess zu verwendenden Referenz und ihrer Qualität stellt die systematische Spezifizierung von Prüfscenarien einen eigenen For-

schungszweig dar. Aufgrund der Vielzahl von denkbaren Anwendungen und daraus resultierenden Verkehrsszenarien für die Fahrzeugortung erscheint eine Festlegung einiger weniger stets zu verwendender Prüfscenarien nicht sinnvoll. Vielmehr müssen die Parameter eines Prüfscenarios in generischer Weise definiert werden, sodass ein „*Baukasten*“ zur Verfügung steht, mit dessen Hilfe ein konkretes Prüfscenario passend zum betrachteten Verkehrsszenario synthetisiert werden kann. Ein Prüfscenario umfasst dann in der Regel lediglich eine Untermenge aller möglichen Parameter, je nach dem, welche Messbedingungen für den intendierten Einsatzzweck des zu prüfenden Ortungssystems relevant sind. Den Weg hierhin zeigen der vorgestellte exemplarische Parameterraum sowie dessen programmtechnische Realisierung in Form eines Szenariensimulators, wie er in [65] beschrieben ist.

Letztlich stellen eine harmonisierte Fachsprache, eine Methode zur Synthese von praktikablen Prüfscenarien sowie generische Anforderungen an die zu nutzende Referenz die Basis für die Standardisierung einer Prüfprozedur dar. Diese gilt es in zukünftigen Forschungsvorhaben zu forcieren und in den zuständigen Fachausschüssen zu verabschieden.

Literaturverzeichnis

- [1] ABATEC GROUP AG: *LPM - Technische Daten*. http://www6.ctm.at/abatec/index_html?sc=46328500, 2013 (abgerufen am: 22.02.2013)
- [2] ADUNKA, Franz: *Messunsicherheiten: Theorie und Praxis*. 3. Aufl. Essen : Vulkan, 2007
- [3] ATP AUTOMOTIVE TESTING PAPENBURG GMBH: *Datenblatt ATP-Teststrecke*. http://inet.atppbg.de/images/stories/strecken_fdy_detail.pdf, 2007 (abgerufen am 22.02.2013)
- [4] BEISEL, Daniel ; HÄNSEL, Frank ; POLIAK, Ján ; MAY, Jörg ; BECKER, Uwe ; SCHNIEDER, Eckehard: DemoOrt - Satellitenbasierte fahrzeugautarke Ortung im Schienenverkehr. In: GESAMTZENTRUM FÜR VERKEHR BRAUNSCHWEIG E. V. (Hrsg.): *POSITIONs*. Braunschweig, 2007
- [5] BEUGIN, Julie ; MARAIS, Juliette: Simulation-based evaluation of dependability and safety properties of satellite technologies for railway localization. In: *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 22 (2012), S. 42–57
- [6] BICH, Walter ; COX, Maurice G. ; HARRIS, Peter M.: Evolution of the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement'. In: INSTITUTE OF PHYSICS (Hrsg.): *Metrologia* Bd. 43. BIPM and Institute of Physics Publishing Ltd., 2006, S. 161–166
- [7] BISHOP, Richard ; BROGGI, Alberto: Intelligent vehicle applications worldwide. In: *IEEE Intelligent Systems and their Applications* 15 (2000), Nr. 1, S. 78–81
- [8] BITTER, Mark ; FEUERLE, Thomas ; WULFEN, Benedikt von ; STEEN, Meiko ; HECKER, Peter: Testbed for dual-constellation GBAS concepts. In: IEEE/ION (Hrsg.): *Position, Location and Navigation Symposium (PLANS)*. Indian Wells/Palm Springs, 2010, S. 680–687

- [9] BRONSTEJN, Il'ja N. ; SEMENDJAEV, Konstantin A. ; MUSIOL, Gerhard ; MÜHLIG, Heiner: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Aufl. Thun und Frankfurt am Main : Harry Deutsch, 2001
- [10] BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Bürgerliches Gesetzbuch*. <http://dejure.org/gesetze/BGB>, In der Fassung vom 02.01.2002 (zuletzt geändert am 20.02.2013)
- [11] BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Straßenverkehrsgesetz*. <http://dejure.org/gesetze/StVG>, In der Fassung vom 05.03.2003 (zuletzt geändert am 22.12.2011)
- [12] BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Produkthaftungsgesetz*. <http://dejure.org/gesetze/ProdHaftG>, Vom 15.12.1989 (zuletzt geändert am 19.07.2002)
- [13] BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: *Straßenverkehrs-Ordnung*. <http://dejure.org/gesetze/StVO>, Vom 16.11.1970 (zuletzt geändert am 01.12.2010)
- [14] CASPARY, Wilhelm ; WICHMANN, Klaus: *Auswertung von Messdaten – Statistische Methoden für Geo- und Ingenieurwissenschaften*. 1. Aufl. München und Wien : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2007
- [15] CHAN, Ching-Yao: Magnetic sensing as a position reference system for ground vehicle control. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 51 (2002), Nr. 1, S. 43–52
- [16] COX, Maurice G. ; SIEBERT, Bernd R. L.: The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. In: *Metrologia* 43 (2006), Nr. 4, S. 178–188
- [17] DÄUBLER, Lorenz ; FILOVA, Bohdana ; SCHROM, Harald: Referenzmesssystem für dynamische Satellitennavigationsexperimente. In: *tm – Technisches Messen* 69 (2002), Nr. 3, S. 125–130
- [18] DELDOSSI, Laura ; ZAPPA, Diego: ISO 5725 and GUM: comparison and comments. In: *Accreditation and Quality Assurance: Journal for Quality, Comparability and Reliability in Chemical Measurement* 14 (2009), Nr. 3, S. 159–166
- [19] DEPRIEST, Dale: *NMEA data*. <http://www.gpsinformation.org/dale/nmea.htm>, 2013 (abgerufen am 15.05.2013)

- [20] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *Internationales Wörterbuch der Metrologie: Grundlegende und allgemeine Begriffe und zugeordnete Benennungen (VIM): ISO/IEC-Leitfaden 99:2007*. Dt.-engl. Fassung, 3. Aufl. Berlin, 2010
- [21] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN 70000:1994-01: Straßenfahrzeuge; Fahrdynamik und Fahrverhalten; Begriffe*. Berlin, 1994
- [22] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN 1319-1:1995-01: Grundlagen der Meßtechnik – Teil 1: Grundbegriffe*. Berlin, 1995
- [23] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN 1319-3:1996-05: Grundlagen der Meßtechnik – Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße – Meßunsicherheit*. Berlin, 1996
- [24] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN 1319-4:1999-02: Grundlagen der Meßtechnik – Teil 4: Auswertung von Messungen; Meßunsicherheit*. Berlin, 1999
- [25] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN EN 50126; VDE 0115-103:2000-03:2000-03: Bahnanwendungen – Spezifikation und Nachweis der Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit, Instandhaltbarkeit, Sicherheit (RAMS); Deutsche Fassung EN 50126:1999*. Berlin, 2000
- [26] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN EN 50129; VDE 0831-129:2003-12:2003-12: Bahnanwendungen – Telekommunikationstechnik, Signaltechnik und Datenverarbeitungssysteme – Sicherheitsrelevante elektronische Systeme für Signaltechnik*. Berlin, 2003
- [27] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN 1319-2:2005-10: Grundlagen der Meßtechnik – Teil 2: Begriffe für Messmittel*. Berlin, 2005
- [28] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN EN ISO/IEC 17025:2005-08: Allgemeine Anforderungen an die Kompetenz von Prüf- und Kalibrierlaboratorien*. Berlin, 2005
- [29] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN V ENV 13005:1999-06: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen; Deutsche Fassung ENV 13005:1999*. Berlin, 2008
- [30] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V.: *DIN EN 50128; VDE 0831-128:2012-03:2012-03: Bahnanwendungen – Telekommunikationstechnik, Signaltechnik und Datenverarbeitungssysteme – Software für Eisenbahnsteuerungs- und*

Überwachungssysteme. Berlin, 2009

- [31] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E. V. ; INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION: *DIN ISO 5725-1: Genauigkeit (Richtigkeit und Präzision) von Meßverfahren und Meßergebnissen – Teil 1: Allgemeine Grundlagen und Begriffe (ISO 5725-1:1994).* Berlin, 1997
- [32] DIETZ, H. ; SASUM, R. ; MEINING, S. ; MARTIN, S. ; VOITHENBERG, M. v. ; BESTMANN, U. ; BECKER, M.: SEA GATE – The operational maritime Galileo testbed in Europe. In: ION (Hrsg.): *20th ION GNSS*. Fort Worth, 2007
- [33] EICHSTÄDT, Sascha ; LINK, Alfred ; ELSTER, Clemens: Dynamic Uncertainty for Compensated Second-Order Systems. In: *sensors* 10 (2010), Nr. 8, S. 7621–7631
- [34] ELSTER, Clemens ; LINK, Alfred: Uncertainty evaluation for dynamic measurements modelled by a linear time-invariant system. In: *Metrologia* 45 (2008), Nr. 4, S. 464–473
- [35] EUROPÄISCHE KOMMISSION: *Aktionsplan für Anwendungen des Globalen Satellitennavigationssysteme.* <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2010:0308:FIN:DE:PDF>, 2010 (abgerufen am 22.02.2013)
- [36] EUROPÄISCHE KOMMISSION ; ESA: *Galileo Mission High Level Definition.* http://ec.europa.eu/dgs/energy_transport/galileo/doc/galileo_hld_v3_23_09_02.pdf, 2002 (abgerufen am 13.08.2013)
- [37] FALK, Michael: A simple approach to the generation of uniformly distributed random variables with prescribed correlations. In: *Communications in Statistics – Simulation and Computation* 28 (1999), Nr. 3, S. 785–791
- [38] GANZELMEIER, Lothar: *Nichtlineare H_∞ -Regelung der Fahrzeuglängsdynamik*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2005
- [39] GASSER, Tom M.: Ergebnisse der Arbeitsgruppe zu den rechtlichen Aspekten automatisierten Fahrens (Projektgruppe: "Rechtsfolgen zunehmender Fahrzeugautomatisierung"). In: ITS NIEDERSACHSEN E. V. (Hrsg.): *AAET – Automatisierungssysteme, Assistenzsysteme und eingebettete Systeme für Transportmittel*. Braunschweig, 2012, S. 14–36
- [40] GRAFAREND, Erik W. ; KRUMM, Friedrich W.: *Map Projections – Cartographic Information Systems*. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006

- [41] GREWAL, Mohinder S. ; WEILL, Lawrence R. ; ANDREWS, Angus P.: *Global positioning systems, inertial navigation, and integration*. 1. Aufl. New York : John Wiley, 2001
- [42] GROMBERT, Bernd ; WINTERHAGEN, Johannes: Keine große Zauberei mehr. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 112 (2010), Nr. 2, S. 88–90
- [43] GRUNERT, U. ; THOELERT, S. ; DENKS, H. ; FURTHNER, J.: Using of spirent GPS/Galileo HW simulator for timing receiver calibration. In: IEEE/ION (Hrsg.): *Position, Location and Navigation Symposium*. Monterey, 2008, S. 77–81
- [44] GTR CONSORTIUM: *Galileo Test Range*. <http://www.gtr-italy.eu>, 2007 (abgerufen am 22.02.2013)
- [45] HÄNSEL, F. ; HÜBNER, M. ; LUX, M. ; POLIAK, J. ; BECKER, U. ; SCHNIEDER, E.: Reference Platforms for Accuracy and Availability Evaluation in Satellite Based Safety Application. In: IFAC (Hrsg.): *6th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles – IAV*. Toulouse, 2007
- [46] HÄNSEL, Frank: *Zur Formalisierung technischer Normen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2008
- [47] HAVEIT CONSORTIUM: *Driving without a Driver – Volkswagen presents the Temporary Auto Pilot*. <http://haveit-eu.org/displayITM1.asp?ITMID=117&LANG=EN>, 2011 (abgerufen am 22.02.2013)
- [48] HEINRICHS, Günter ; LÖHNERT, Erwin ; WITTMANN, Elmar ; KANIUTH, Roland: Opening the GATE: Germany’s Galileo Test and Development Environment. In: *Inside GNSS* 2 (2007), Nr. 3, S. 44–52
- [49] HEISTER, Hansbert ; HEUNECKE, Otto ; PFLUGMACHER, Andreas: Investigations to the Accuracy of handheld Garmin GPS Receivers. In: *European Journal of Navigation* 7 (2009), Nr. 3, S. 11–17
- [50] HELBIG, J.: *Robuste Regelungsstrategien am Beispiel der PKW-Spurführung*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2004
- [51] HESSLING, Jan P.: Dynamic metrology—an approach to dynamic evaluation of linear time-invariant measurement systems. In: *Measurement Science and Technology* 19 (2008), Nr. 8

- [52] HESSLING, Jan P.: A novel method of evaluating dynamic measurement uncertainty utilizing digital filters. In: *Measurement Science and Technology* 20 (2009), Nr. 5
- [53] HESSLING, Jan P.: Metrology for Non-Stationary Dynamic Measurements. In: SHARMA, Milind K. (Hrsg.): *Advances in Measurement Systems*. 1. Aufl. INTECH, 2010, S. 221–256
- [54] HOFFMANN, Jörg: *Taschenbuch der Messtechnik*. 5. Aufl. München : Carl Hanser, 2007
- [55] HOFMANN-WELLENHOF, B. ; LEGAT, K. ; WIESER, M.: *Navigation: Principles of positioning and guidance*. 1. Aufl. Wien, London : Springer, 2003
- [56] HÜBNER, Matthias: *Modellbildung und Regelung eines kooperativen Straßenverkehrs mittels Petrinetzen und Konsens-Algorithmen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2012
- [57] HÜBNER, Matthias ; POLIAK, Ján ; BEISEL, Daniel ; BECKER, Uwe ; SCHNIEDER, Eckehard: Reference Measurement Platforms for Satellite Based Localisation in Ground Transportation. In: IEEE (Hrsg.): *70th Vehicular Technology Conference*. Barcelona, 2009
- [58] INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION: *IEC 60050-191: International Electrotechnical Vocabulary*. <http://www.dke.de/de/online-service/dke-iev/Seiten/IEV-Woerterbuch.aspx>, 2012 (abgerufen am 13.08.2013)
- [59] INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION: *IEC 61508 Edition 2.0: Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems*. Genf, 2010
- [60] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION: *ISO 26262:2011: Road Vehicles – Functional Safety*. Genf, 2011
- [61] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION ; INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION: *ISO/IEC Guide 98-3:2008: Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995)*. Genf, 2008
- [62] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION ; INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION: *ISO/IEC Guide 98-3:2008/Suppl 1:2008: Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Genf, 2008

- [63] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION ; INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION: *ISO/IEC Guide 98-1:2009: Uncertainty of measurement – Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement*. Genf, 2009
- [64] JAKOBSEN, Jakob: Design of a GNSS kinematic slot car test track. In: IAIN (Hrsg.): *13th IAIN World Congress*. Stockholm, 2009
- [65] JAKOBSEN, Jakob ; JENSEN, Anna B. O. ; MARAIS, Juliette: Simulating GNSS Position Accuracy using Non-line of Sight Reflected Signals. In: AUSTRIAN INSTITUTE OF NAVIGATION (Hrsg.): *ENC GNSS 2013*. Wien, 2013
- [66] JAYNES, Edward T.: Information Theory and Statistical Mechanics. In: *The Physical Review* 106 (1957), Nr. 4, S. 620–630
- [67] JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY: *JCGM 102:2011: Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Extension to any number of output quantities*. 2011
- [68] JUNGE, Lutz ; WEISER, Andreas ; DORNIEDEN, Bernd ; KNAKE-LANGHORST, Sascha ; LÖPER, Christian ; SCHEBITZ, Norbert: FAMOS – Galileo for Future AutoMOtive Systems. In: ITS NIEDERSACHSEN E.V. (Hrsg.): *AAET – Automatisierungssysteme, Assistenzsysteme und eingebette Systeme für Transportmittel* Bd. 13. Braunschweig, 2012, S. 37–57
- [69] KACKER, R. ; JONES, A.: On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. In: *Metrologia* 40 (2003), Nr. 5, S. 235–248
- [70] KACKER, Raghu ; SOMMER, Klaus-Dieter ; KESSEL, Rüdiger: Evolution of modern approaches to express uncertainty in measurement. In: *Metrologia* 44 (2007), Nr. 6, S. 513–529
- [71] KÄMPCHEN, Nico ; AEBERHARD, Michael ; ARDELT, Michael ; RAUCH, Sebastian: Techniken für das hochautomatisierte Fahren auf der Autobahn. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 114 (2012), Nr. 6, S. 498–503
- [72] KÄMPCHEN, Nico ; WALDMANN, Peter ; ARDELT, Michael ; HOMM, Florian: Umfelderkennung für den Nothalteassistenten – ein System zum automatischen Anhalten bei plötzlich reduzierter Fahrfähigkeit des Fahrers. In: ITS NIEDERSACHSEN E.V. (Hrsg.): *AAET – Automatisierungssysteme, Assistenzsysteme und eingebette Systeme für Transportmittel*. Braunschweig, 2010, S. 122–137

- [73] KAPLAN, Elliott D. ; HEGARTY, Christopher J.: *Understanding GPS: Principles and applications*. 2. Aufl. Boston : Artech House, 2006
- [74] KATRINIOK, Alexander: automotiveGATE - Anwendungszentrum für bodengebundenen Verkehr. In: *4. Nationale Galileo Anwenderkonferenz*. Wolfsburg, 2009
- [75] KATRINIOK, Alexander ; REITER, Matthias ; ABEL, Dirk: Kollisionsvermeidung mittel Galileo. In: *ATZe Elektronik* 6 (2011), Nr. 1, S. 44–49
- [76] KESSEL, Wolfgang: Messunsicherheit – einige Begriffe und Folgerungen für die messtechnische Praxis. In: *PTB Mitteilungen* 111 (2001), Nr. 3, S. 20–38
- [77] KLUSSMANN, Niels ; MALIK, Arnim: *Lexikon der Luftfahrt*. 3. Aufl. Heidelberg : Springer, 2012
- [78] LAUB, Alan J.: *Matrix analysis for scientists & engineers*. 1. Aufl. Philadelphia : SIAM, 2005
- [79] LEOHOLD, Jürgen: Antriebs- und Fahrzeugkonzepte für die Mobilitätsanforderungen der Zukunft. In: *3. Internationales Mobilitätssymposium "Auto und Energie"*. Melk, 2009
- [80] LINK, Alfred ; ELSTER, Clemens: Uncertainty evaluation for IIR (infinite impulse response) filtering using a state-space approach. In: *Measurement Science and Technology* 20 (2009), Nr. 5
- [81] LIRA, Ignacio ; WÖGER, Wolfgang: Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. In: *Measurement Science and Technology* 12 (2001), Nr. 8, S. 1172–1179
- [82] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme Digitale Regelung*. 4. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006
- [83] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007
- [84] MENG, Xiaolin ; TANG, Weiming ; SUN, Fanguha ; SHI, Chuang: Using Low-cost GPS Receivers and Networks RTK Positioning for High Precision LBS and ITSS Applications. In: DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ORTUNG UND NAVIGATION E. V. (Hrsg.): *ENC GNSS*. Braunschweig, 2010

- [85] METRODATA GMBH: *GUM Workbench Professional Version 2.4 - Datenblatt*. <http://www.metrodata.de/ver24.pdf>, 2010 (abgerufen am 22.02.2013)
- [86] MÜLLER, Jörg R.: *Die formalisierte Terminologie der Verlässlichkeit technischer Systeme (eingereicht)*. TU Braunschweig, Habil., 2012
- [87] NIEHUES, Daniel: *Ein Beitrag zur hochgenauen Positionsbestimmung von Fahrzeugen als Grundlage autonomer Fahrregime im Hochgeschwindigkeitsbereich*, TU Dresden, Diss., 2013
- [88] OXFORD TECHNICAL SOLUTIONS: *RT3000: Hochpräzise GPS-Inertial+GPS gestützte Inertialmesssysteme*. http://www.oxts.com/downloads/RT3000_DE.pdf, 2012 (abgerufen am 22.02.2013)
- [89] OXFORD TECHNICAL SOLUTIONS: *RT3000 Measurements*. <http://www.oxts.com/default.asp?pageRef=10>, 2012 (abgerufen am 22.02.2013)
- [90] PANKRATZ, Kirsten: *Implementierung eines Monte-Carlo-Ansatzes zur Beurteilung von Messunsicherheiten nach dem GUM-Verfahren*, Technische Universität Braunschweig, Diplomarbeit, 2012
- [91] PANKRATZ, Maren: *Entwicklung einer MATLAB-Toolbox zur Beurteilung von Messunsicherheiten nach dem Standard-GUM-Verfahren*, Technische Universität Braunschweig, Diplomarbeit, 2012
- [92] PETROVSKI, Ivan ; TSUJII, Toshiaki ; PERRE, Jean-Michel ; TOWNSEND, Bryan ; EBINUMA, Takuji: GNSS Simulation: A User's Guide to the Galaxy. In: *Inside GNSS* 5 (2010), Nr. 7, S. 36–45
- [93] POLIAK, Ján: *Validierung von satellitenbasierten Eisenbahnortungssystemen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2009
- [94] POURVOYEUR, K. ; STELZER, A. ; GAHLEITNER, T. ; SCHUSTER, S. ; GASSENBAUER, G.: Effects of motion models and sensor data on the accuracy of the LPM positioning system. In: IEEE (Hrsg.): *International Conference on Information Fusion*. Florence, 2006
- [95] PRESSEL, Hans-Gerd ; HAGENEY, Theo: *Messunsicherheit von Prüfmerkmalen in der Koordinatenmesstechnik: Von der Genauigkeit des KMG zur Messunsicherheit eines Prüfmerkmals*. 1. Aufl. Renningen : expert, 2008

- [96] PUENTE LEÓN, Fernando ; KIENCKE, Uwe ; JÄKEL, Holger: *Signale und Systeme*. 3. Aufl. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2010
- [97] QUALISYST GMBH: *QMSys GUM Funktionsmatrix*. http://http://www.qsyst.com/qualisyst_de.htm, 2011 (abgerufen am 22.02.2013)
- [98] RAKOWSKY, Uwe K. ; RICHARDSON, Nicole: *Wörterbuch der Zuverlässigkeit*. 1. Aufl. Hagen : Life-Long-Learning, 2001
- [99] RAT DER EUROPÄISCHE UNION: *Richtlinie 85/374/EWG zur Angleichung der Rechts- und Verwaltungsvorschriften der Mitgliedstaaten über die Haftung für fehlerhafte Produkte*. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CELEX:31985L0374:de:HTML>, 1985 (abgerufen am 22.02.2013)
- [100] RESCH, Andreas ; PFEIL, Reimar ; WEGENER, Marco ; STELZER, Andreas: Review of the LPM Local Positioning Measurement System. In: IEEE (Hrsg.): *International Conference on Localization and GNSS*. Starnberg, 2012
- [101] RICHTER, R. ; MICHLER, O. ; WEBER, R. ; ZEISBERG, S.: Positioning techniques and telematic applications in the 2.4 GHz-band – Indoor and outdoor analysis results based on a commercial wide band location system. In: IEEE (Hrsg.): *7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication (WPNC)*. Dresden, 2010, S. 299–302
- [102] RIDLER, Nick ; LEE, Brian ; MARTENS, Jon ; WONG, Ken: Measurement Uncertainty, Traceability, and the GUM. In: *IEEE Microwave Magazine* 8 (2007), Nr. 4, S. 44–52
- [103] RINNE, Horst: *Taschenbuch der Statistik*. 4. Aufl. Frankfurt am Main : Harri Deutsch, 2008
- [104] RÜTTERS, R. ; SCHAEFER, B. ; BAIER, M. ; ABEL, D.: Validation of satellite-based railway application systems using the GALILEO testbed railGATE exemplified by automated train formation facilities. In: IEEE (Hrsg.): *9th International Conference on Intelligent Transport Systems Telecommunications (ITST)*. Lille, 2009, S. 337–342
- [105] SATTERTHWAITE, F. E.: An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. In: *Biometrics Bulletin* 2 (1946), Nr. 6, S. 110–114
- [106] SCHATTENBERG, Jan ; ROBERT, Markus ; HAPPICH, Georg ; LANG, Thorsten: A flexible platform for research on cooperating machinery. In: INSTITUT FÜR GEO-

DÄSE UND GEOINFORMATION (Hrsg.): *2nd International Conference on Machine Control & Guidance (MCG)*. Bonn, 2010, S. 277–285

- [107] SCHNIEDER, Eckehard: *Methoden der Automatisierung*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg, 1999
- [108] SCHNIEDER, Eckehard: Nutzung von Satellitenortungssystemen für Eisenbahnen im rechtlichen Rahmen. In: *ZE Vrail* 133 (2009), Nr. 9, S. 351–357
- [109] SCHNIEDER, Eckehard: Qualität dynamischer Satellitenortung im Eisenbahnverkehr. In: *tm – Technisches Messen* 79 (2012), Nr. 4, S. 210–219
- [110] SCHNIEDER, Eckehard ; BECKER, Uwe ; HÜBNER, Matthias ; BEISEL, Daniel ; WEGENER, Marco ; REINBOLD, Felix ; QUIROGA, Lisandro: Gemini: Genauigkeit satellitengestützter Bewegungssysteme und Entwicklung einer Messplattform für Landfahrzeuge / TU Braunschweig. Braunschweig, 2010. – Forschungsbericht
- [111] SCHNIEDER, L. ; STEIN, C. ; SCHIELKE, A. G. ; PFUNDMAYR, M.: Effektives Terminologiemanagement als Grundlage methodischer Entwicklung automatisierungstechnischer Systeme. In: *at – automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 1, S. 62–70
- [112] SCHNIEDER, Lars: *Formalisierte Terminologien technischer Systeme und ihrer Zuverlässigkeit*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2010
- [113] SCHNIEDER, Lars ; WEGENER, Marco: Transgression of semantic boundaries by methodical terminology management: Application to the terminology and metrology of satellite based localisation systems. In: UNIVERSITY OF LEICESTER (Hrsg.): *Accuracy 2010 – The Ninth International Symposium on Spatial Accuracy Assessment*. Leicester, 2010, S. 425–428
- [114] SEIBOLD, Holger: *IT-Risikomanagement*. 1. Aufl. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2006
- [115] SHANNON, Claude E.: A Mathematical Theory of Communication. In: *The Bell System Technical Journal* 27 (1948), Nr. 3, S. 379–423
- [116] SHARP, Ian ; YU, Kegen ; GUO, Y. J.: GDOP Analysis for Positioning System Design. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 58 (2009), Nr. 7, S. 3371–3382

- [117] SIEBERT, Bernd R. L. ; SOMMER, Klaus-Dieter: Uncertainty. In: GLASER, Michael (Hrsg.) ; KOCHSIEK, Manfred (Hrsg.): *Handbook of Metrology*. 1. Aufl. Weinheim : WILEY-VCH, 2010, S. 415–461
- [118] SOMMER, Klaus-Dieter ; HANEBECK, Uwe D. ; KRYSTEK, Michael ; HAUSWALDT, Anna-Lisa ; WECKENMANN, Albert: Modelling of dynamic measurements for uncertainty analysis by means of discretized state-space forms. In: IMEKO (Hrsg.): *XIX IMEKO World Congress*. Lisbon, 2009, S. 1037–1041
- [119] SOMMER, Klaus-Dieter ; SIEBERT, Bernd R. L.: Systematische Modellbildung und Grundsätze der Bereichskalibrierung. In: *tm – Technisches Messen* 72 (2005), Nr. 5, S. 258–277
- [120] SOMMER, Klaus-Dieter ; SIEBERT, Bernd R. L.: Korrelation und Messunsicherheit. In: *PTB-Mitteilungen* 116 (2006), Nr. 3, S. 263–273
- [121] SOMMER, Klaus-Dieter ; SIEBERT, Bernd R. L.: Systematic approach to the modelling of measurements for uncertainty evaluation. In: *Metrologia* 43 (2006), Nr. 4, S. 200–210
- [122] STÄNDER, Tobias: *Eine modellbasierte Methode zur Objektivierung der Risikoanalyse nach ISO 26262*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2011
- [123] STATISTISCHES BUNDESAMT: *Unfallentwicklung auf deutschen Strassen 2010*. Wiesbaden, 2011
- [124] STEIN, C. ; SCHNIEDER, L. ; PFUNDMAYR, M.: Der iglos Terminologie-Engineering-Prozess (iglos tep) zur interdisziplinären und verteilten Terminologearbeit. In: *EKA – Entwurf komplexer Automatisierungssysteme*. Magdeburg, 2010
- [125] STELZER, Andreas ; POURVOYEUR, Klaus ; FISCHER, Alexander: Concept and Application of LPM – A Novel 3-D Local Position Measurement System. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 52 (2004), Nr. 12, S. 2664–2669
- [126] STÜBING, Hagen ; BECHLER, Marc ; HEUSSNER, Dieter ; MAY, Thomas ; RADUSCH, Ilja ; RECHNER, Horst ; VOGEL, Peter: simTD: A car-to-X system architecture for field operational tests. In: *IEEE Communications Magazine - Automotive Networking Series* 48 (2010), Nr. 5, S. 148–154

- [127] SYMEO GMBH: *LPR-2D Positionserfassung von Kranen und Fahrzeugen zur Warenverfolgung*. http://www.symeo.com/cms/upload/PDF/Datenblatt_LPR-2D.pdf, 2008 (abgerufen am 22.02.2013)
- [128] TARALDSEN, Gunnar: Instrument resolution and measurement accuracy. In: *Metrologia* 43 (2006), Nr. 6, S. 539–544
- [129] TAYLOR, Barry N. ; KUYATT, Chris E.: Technical Note 1297: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results / National Institute of Standards and Technology. Gaithersburg, 1994. – Forschungsbericht
- [130] TRIMBLE: *S8 Total Station Datenblatt*. http://trl.trimble.com/docushare/dsweb/Get/Document-390413/022543-410F-D_TrimbleS8_DS_1011_sec.pdf, 2012 (abgerufen am 22.02.2013)
- [131] VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE E. V.: *VDI 4004 Blatt 5:2013: Leitfaden zur formalisierten Begriffsmodellierung zentraler Termini der technischen Zuverlässigkeit (verabschiedet)*. Berlin, 2013
- [132] VEREINTE NATIONEN: *Übereinkommen über den Strassenverkehr*. http://www.admin.ch/ch/d/sr/0_741_10/index.html, 1968 (abgerufen am 22.02.2013)
- [133] VOSSIEK, Martin ; ROSKOSCH, R. ; HEIDE, Patric: Precise 3-D Object Position Tracking Using FMCW Radar. In: IEEE (Hrsg.): *29th European Microwave Conference*. Munich, 1999, S. 234–237
- [134] VOSSIEK, Martin ; WIEBKING, Leif ; GULDEN, Peter ; WIEGHARDT, Jan ; HOFFMANN, Clemens ; HEIDE, Patric: Wireless local positioning. In: *IEEE Microwave Magazine* 4 (2003), Nr. 4, S. 77–86
- [135] WECKENMANN, Albert ; SOMMER, Klaus-Dieter ; SIEBERT, Bernd R. L.: Qualität für Messergebnisse – Messunsicherheit nach GUM. In: *Technisches Messen* 73 (2006), Nr. 4, S. 189–199
- [136] WEGENER, M. ; SCHNIEDER, E.: A Measurement Standard for Vehicle Localization and Its ISO-Compliant Measurement Uncertainty Evaluation. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 61 (2012), Nr. 11, S. 3003–3013
- [137] WEGENER, M. ; SCHNIEDER, E.: State-space Based Adaptation of the ISO GUM to Time-dependent Uncertainties of Dynamically Measured Quantities. In: IMEKO (Hrsg.): *XX IMEKO World Congress*. Busan, 2012

- [138] WEGENER, M. ; SCHNIEDER, E.: Application of the GUM method for state-space systems in case of uncorrelated input uncertainties. In: *Measurement Science and Technology* 24 (2013), Nr. 2
- [139] WEGENER, Marco ; HÜBNER, Matthias ; BRAHMI, Mohamed ; SIEDERSBERGER, Karl-Heinz ; SCHNIEDER, Eckehard ; MAURER, Markus: Anforderungen an ein Referenzsystem für die Fahrzeugortung. In: *ATZe Elektronik* 7 (2012), Nr. 5, S. 392–397
- [140] WEGENER, Marco ; HÜBNER, Matthias ; SCHNIEDER, Eckehard: Anforderungen an ein Referenzmesssystem zur Untersuchung der GPS-Messqualität. In: *tm – Technisches Messen* 78 (2011), Nr. 7-8, S. 354–363
- [141] WEGENER, Marco ; HÜBNER, Matthias ; SCHNIEDER, Eckehard: Entwicklung eines Referenzmesssystems für Ortungssysteme im Straßenverkehr unter Berücksichtigung des Qualitätsbegriffs. In: ITS NIEDERSACHSEN E. V. (Hrsg.): *AAET – Automatisierungs-, Assistenzsysteme und eingebettete Systeme für Transportmittel*. Braunschweig, 2011, S. 260–279
- [142] WEGENER, Marco ; HÜBNER, Matthias ; SCHNIEDER, Eckehard: Method for the verification of indoor localization systems with regard to road traffic applications by means of electromagnetic fields. In: IEEE (Hrsg.): *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*. Guimarães, 2011
- [143] WEGENER, Marco ; HÜBNER, Matthias ; SCHNIEDER, Eckehard: Methode zur positionsbasierten Verifizierung von Fahrzeugmodellen mittels Referenzsystemen. In: VDI (Hrsg.): *AUTOREG 2011 – Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren*. Baden-Baden, 2011
- [144] WEGENER, Marco ; SCHNIEDER, Eckehard: Design of a mobile GNSS reference system for road vehicle localisation. In: ITS JAPAN (Hrsg.): *20th ITS World Congress*. Tokio, 2013
- [145] WEISE, K. ; WÖGER, W.: A Bayesian theory of measurement uncertainty. In: *Measurement Science and Technology* 4 (1993), Nr. 1, S. 1–11
- [146] WEISE, Klaus ; WÖGER, Wolfgang: *Meßunsicherheit und Meßdatenauswertung*. 1. Aufl. Weinheim : WILEY-VCH, 1999
- [147] WEISER, Martin: *Ein Fehlermodell für die präzise Satellitenortung in dynamischer Umgebung*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2000

- [148] WELCH, B. L.: The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved. In: *Biometrika* 34 (1947), Nr. 1-2, S. 28–35
- [149] WILTSCHKO, Thomas: *Sichere Information durch infrastrukturgestützte Fahrerassistenzsysteme zur Steigerung der Verkehrssicherheit an Straßenknotenpunkten*, Universität Stuttgart, Diss., 2004
- [150] WINKEL, J. ; WOLF, R. ; PROKOPH, G. ; MOCKER, G.: The Merlin Signal Generator - A Powerful, Low-Cost Constellation Galileo/GPS Signal Simulator. In: ION (Hrsg.): *19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS)*. Fort Worth, 2006, S. 246–250
- [151] WINNER, Hermann ; HAKULI, Stephan ; WOLF, Gabriele: *Handbuch Fahrerassistenzsysteme: Grundlagen, Komponenten und Systeme für aktive Sicherheit und Komfort*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2009
- [152] WIOR, Ireneus ; FAY, Alexander: Systemdynamische Konsequenzen von Mauterhebung und anderen Eingriffen in den Verkehr. In: *at – automatisierungstechnik* 60 (2012), Nr. 4, S. 194–201
- [153] WÖGER, Wolfgang: Zu den modernen Grundlagen der Datenauswertung in der Metrologie. In: *PTB Mitteilungen* 111 (2001), Nr. 3/4, S. 4–19
- [154] WOLF, Robert ; THALHAMMER, Markus ; HEIN, Guenther W.: GATE – The German Galileo Test Environment. In: ION (Hrsg.): *ION GPS/GNSS*. Oregon, 2003
- [155] WOLLENSACK, Michael ; ZEIER, Markus: *Metas.UncLib – An advanced Measurement Uncertainty Calculator*. <http://www.metas.ch/metasweb/Fachbereiche/Elektrizitaet/HF/MetasUncLib>. <http://www.metas.ch/metasweb/Fachbereiche/Elektrizitaet/HF/MetasUncLib>. Version: 2009 (abgerufen am 22.02.2013)
- [156] ZEIER, Markus: Der ISO-GUM erhält Verstärkung. In: *METinfo* 15 (2008), Nr. 3, S. 9–15
- [157] ZHANG, Wei-bin ; PARSONS, Robert E. ; WEST, Thomas: An Intelligent Roadway Reference System for Vehicle Lateral Guidance/Control. In: IEEE (Hrsg.): *American Control Conference*. San Diego, 1990, 281-286

Abbildungsverzeichnis

1.1	Formalisierung des Ortungsbegriffs in Kontext des Verkehrswesens [109]	7
1.2	Zusammenhang zwischen Qualifizierung, Verifizierung und Validierung .	16
2.1	Schematische Darstellung der in einem Prüfprozess auftretenden Trajektorien	21
2.2	Typische Komponenten einer Messkette	23
2.3	Relationen der wichtigsten Grundbegriffe	24
2.4	Abweichungen zwischen Größenwert, Referenzwert und Messwert	26
2.5	Konstituenten der Messqualität dargestellt in UML-Notation	28
2.6	Vergleich von Messergebnissen mit Hilfe von Messunsicherheiten	29
2.7	Konformitätsbewertung mit Hilfe von Messunsicherheiten	30
2.8	Konstituenten der Messpräzision	31
2.9	Quantifizierte Verfügbarkeitskontinuität in Abhängigkeit vom Parameter Ξ_V	41
3.1	Messung des Abstands zweier paralleler Linien	51
3.2	Linearisierung eines univariaten Messmodells	54
3.3	Linearisierung eines univariaten Messmodells an einer Extremstelle . .	54
3.4	Funktionsgrundelemente der Modellbildung	56
3.5	Generische Struktur bei der Messmethode <i>Direkte Messung</i>	57
3.6	Generische Struktur bei der Messmethode <i>Direkter Vergleich</i>	57
3.7	Generische Struktur bei der Messmethode <i>Substitution</i>	58
3.8	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung	60
3.9	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Gleichverteilung	61
3.10	Parameterabhängige Annäherung der t-Verteilung an die Normalverteilung	70
3.11	Beispielhafte Darstellung des 95%-Überdeckungsbereichs einer zweidimensionalen Messgröße	71
3.12	Zusammenfassende Darstellung des Standard-GUM-Verfahrens für eine Messgröße unter Vernachlässigung von Korrelationen	73
3.13	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Messgröße unter idealen und realen Messbedingungen	74
3.14	Zusammenfassende Darstellung des Monte-Carlo-Verfahrens	77
4.1	Betrachtete Messanordnung mit dynamischem Anteil	96

4.2	Entscheidungsbaum zur Auswahl des geeigneten Beurteilungsverfahrens	106
4.3	Verlauf der zu filternden Eingangsgrößenwerte und ihrer Messunsicherheit	108
4.4	Verlauf der gefilterten Eingangsgrößenwerte und ihrer Messunsicherheit	109
4.5	Verlauf der gemessenen Beschleunigungswerte und ihrer Messunsicherheit	111
4.6	Verlauf der Geschwindigkeit und ihrer Messunsicherheit	111
4.7	Verlauf der zurückgelegten Distanz und ihrer Messunsicherheit	112
5.1	Prüfspur auf dem Gelände der PTB	115
5.2	Strecken- und fahrzeugseitige Komponenten des Referenzsystems	115
5.3	Konzept der Datenfusion des Referenzsystems	118
5.4	Geometrie des Messaufbaus	119
5.5	Blockschaltbild der linearen Messfunktion	122
5.6	Erweiterte Messunsicherheit der auf den Arbeitspunkt bezogenen Antennenposition mit einem Grad an Vertrauen von $P = 95\%$	129
5.7	Messunsicherheitsbudget des Referenzsystems	131
5.8	Querablage des geregelten Fahrzeugs zur Prüftrajektorie	133
5.9	Generierte Referenzposition in Längs- und Querrichtung	134
5.10	Vollständiger Geschwindigkeitsverlauf der Messfahrt	137
5.11	Amplitudenspektrum des Geschwindigkeitssignals während des Grenzyklus	137
5.12	Simulierter Geschwindigkeitsverlauf mit der Frequenz $f_{\max} = 0,1$ Hz aufgetragen über den zurückgelegten Weg	138
6.1	Notwendige Messrate f_{Ref} für $ \Delta \mathbf{x} = 1$ cm in Abhängigkeit von r_{\min} und v_{\max} und die Funktion $v_{\max}(r_{\min})$ bei $f_{\text{Ref}} = 20$ Hz	145
6.2	Architektur des mobilen Referenzsystems am Beispiel der satellitenbasierten Ortung	151
6.3	Darstellung der Datenfusion des Referenzsystems	153
6.4	Darstellung der direkten und indirekten Messgrößen in den verschiedenen Koordinatensystemen	154
7.1	Ablauf einer Konformitätsbewertung eines Ortungssystems	160
7.2	Visualisierung des Dilution of Precision bei der Kalibrierung (oben) und bei dem Prüfprozess (unten)	163
7.3	Darstellung der Prüftrajektorie auf dem Prüfgelände	165
7.4	Darstellung der gesichteten Satelliten	166
7.5	Gegenüberstellung der quantifizierten Messgenauigkeiten bei Messung 1 mit 2 m/s (oben), Messung 2 mit 4 m/s (mitte) und Messung 3 mit 7 m/s (unten)	168
7.6	Festgestellte Messabweichungen längs und quer zur Fahrtrichtung bei Messung 3 mit 7 m/s	169

Tabellenverzeichnis

1.1	Klassifizierung von Messfunktionen	11
3.1	Übersicht über die wichtigsten Erweiterungsfaktoren bei vorliegender Normalverteilung	68
3.2	Bewertung von Verfahren zur Messunsicherheitsbeurteilung	89
5.1	Definition aller relevanten Größen	121
5.2	Zusammenfassung der gemessenen Koordinaten und den berechneten statistischen Größen in cm bzw. cm ²	124
5.3	Unsicherheitsbudget aller Eingangsgrößen	126
6.1	Klassifizierung der Referenzsystemtypen für die Fahrzeugortung	140
6.2	Bewertung der Ortungstechnologien	149
7.1	Parameterraum für Prüfscenarien	162
7.2	Quantifizierung der Verfügbarkeitsmerkmale	167

ANHANG A

Herleitung des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes

In Anlehnung an [14, S. 36-37] kann das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz in seiner allgemeinen Form, d. h. für beliebig viele und möglicherweise korrelierte Ein- und Ausgangsgrößen wie folgt hergeleitet werden.

Sei \mathbf{f} eine lineare Vektorfunktion, welche den Vektor der Eingangsgrößen \mathbf{X} auf den Vektor der Ausgangsgrößen \mathbf{Y} abbildet:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{X}.$$

Für die Varianz einer skalaren Ausgangsgrößen gilt definitionsgemäß

$$\text{VAR}\{Y\} := E\{Y^2\} - E\{Y\}^2,$$

was durch

$$\text{VAR}\{\mathbf{Y}\} := E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\} - E\{\mathbf{Y}\}E\{\mathbf{Y}\}^T$$

auf den vektoriellen Fall verallgemeinert wird. Für die beiden Summanden $E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\}$ und $E\{\mathbf{Y}\}E\{\mathbf{Y}\}^T$ gilt unter Ausnutzung der Linearitätseigenschaft des Erwartungswert-Operators

$$E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\} = E\{(\mathbf{C}\mathbf{X})(\mathbf{C}\mathbf{X})^T\} = E\{\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{C}^T\} = \mathbf{C}E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\}\mathbf{C}^T$$

bzw.

$$E\{\mathbf{Y}\}E\{\mathbf{Y}\}^T = (\mathbf{C}E\{\mathbf{X}\})(\mathbf{C}E\{\mathbf{X}\})^T = \mathbf{C}E\{\mathbf{X}\}E\{\mathbf{X}^T\}\mathbf{C}^T.$$

Somit ergibt sich für die Varianz des Ausgangsgrößenvektors:

$$\text{VAR}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{C}(\text{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} - \text{E}\{\mathbf{X}\}\text{E}\{\mathbf{X}^T\})\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\text{VAR}\{\mathbf{X}\}\mathbf{C}^T.$$

Da die Unsicherheitsmatrix den Charakter einer Varianz-Kovarianz-Matrix besitzt, gilt analog das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz

$$\boxed{\mathbf{U}_Y = \mathbf{C}\mathbf{U}_X\mathbf{C}^T.}$$

Hinweis: Es gilt $\text{VAR}\{\mathbf{Y}\} = \text{VAR}\{\mathbf{C}\mathbf{X}\} = \mathbf{C}\text{VAR}\{\mathbf{X}\}\mathbf{C}^T \neq \mathbf{C}\text{VAR}\{\mathbf{X}\}$, da die Varianz ein nichtlinearer Operator ist.